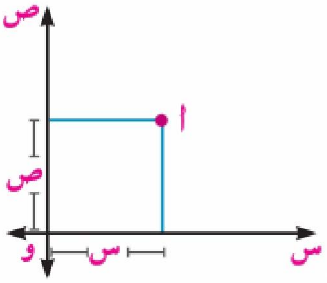
الوحدة الأولى
الهندسة والقياس فى بعدين وثلاثة أبعاد

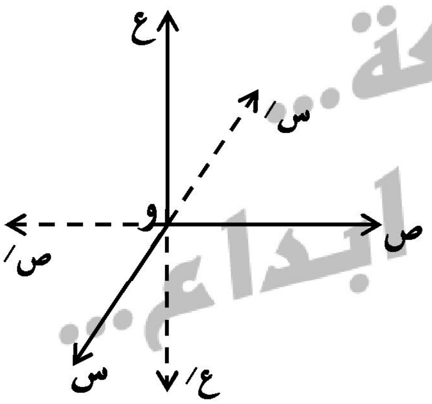
١ - ١ النظام الإحداثى المتعامد فى ثلاثة أبعاد

✱ موضع النقطة فى المستوى:



سبق أن درسنا النظام الإحداثى المتعامد فى بعدين
ويسمى الشبكة التربيعية أو النظام الإحداثى المستوى
وعلمنا أنه لتحديد موضع النقطة فى المستوى يلزم
معرفة مسقط النقطة على كل من محورين متعامدين
وهما محور س ومحور ص ففى الشكل نلاحظ أن ا = (س ، ص) ∋ $ع^٢$

✱ النظام الإحداثى المتعامد فى ثلاثة أبعاد ($ع^٣$):



لتحديد موضع النقطة فى الفراغ يلزم معرفة مسقط
النقطة على كل من ثلاثة محاور متقاطعة فى نقطة
ومتعامدة مثنى وهذه المحاور هى:
محور س ومحور ص ومحور ع كما هو موضح بالشكل:
ويتم تحديد ترتيب هذه المحاور باستخدام قاعدة اليد اليمنى

✱ قاعدة اليد اليمنى:

إذا كانت الأصابع المنحنية لليد اليمنى تشير للدوران من الإتجاه الموجب لمحور س إلى الإتجاه الموجب لمحور ص من خلال الزاوية الصغرى فإن إصبع الإبهام يشير إلى الإتجاه الموجب لمحور ع

✱ مستويات الإحداثيات:

- جميع نقط الفراغ التى إحداثياتها (س ، ص ، ٠) تقع فى المستوى الإحداثى س ص ومعادلته **ع = ٠**
- جميع نقط الفراغ التى إحداثياتها (س ، ٠ ، ع) تقع فى المستوى الإحداثى س ع ومعادلته **ص = ٠**
- جميع نقط الفراغ التى إحداثياتها (٠ ، ص ، ع) تقع فى المستوى الإحداثى ص ع ومعادلته **س = ٠**

ملاحظة:

لاحظ أن النقطة (س ، ٠ ، ٠) تقع على محور س ، النقطة (٠ ، ص ، ٠) تقع على محور ص
، النقطة (٠ ، ٠ ، ع) تقع على محور ع

✸بعد النقطة عن المحاور ومستويات الإحداثيات:

إذا كانت نقطة أ فى الفراغ حيث إحداثيات أ فى نظام ثلاثى الأبعاد هى (س ، ص ، ع) فإن:

بعد النقطة أ (س ، ص ، ع)	
عن محور س = $\sqrt{ص^2 + ع^2}$	عن المستوى الإحداثى س ص = |ع|
عن محور ص = $\sqrt{س^2 + ع^2}$	عن المستوى الإحداثى س ع = |ص|
عن محور ع = $\sqrt{س^2 + ص^2}$	عن المستوى الإحداثى ص ع = |س|

مثـــال:

عين موضع كل من النقط الآتية باستخدام نظام إحداثى متعامد ثلاثى الأبعاد:

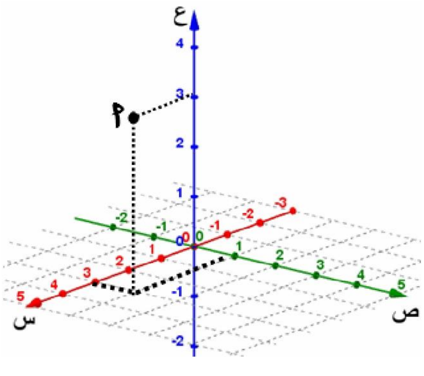
أ (٣ ، ١ ، ٣)   ب (–١ ، ٤ ، ٣)   ج (٠ ، ٠ ، ٤)

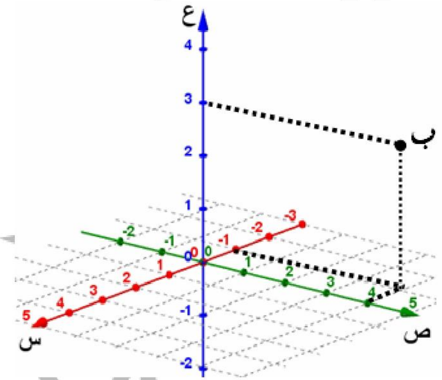
الحـــل:

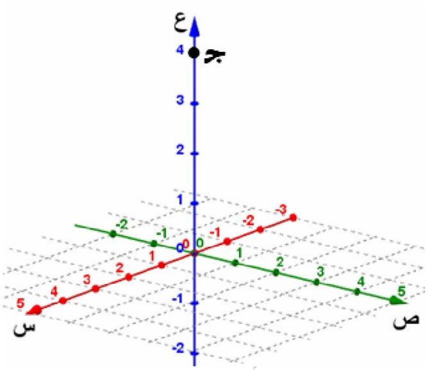
(أ) لتحديد موضع النقطة أ (٣ ، ١ ، ٣) نحدد النقطة (٣ ، ١) فى المستوى س ص ثم نتحرك فى الإتجاه الموجب لمحور ع ثلاث وحدات

(ب) لتحديد موضع النقطة ب (–١ ، ٤ ، ٣) نحدد النقطة (–١ ، ٤) فى المستوى س ص ثم نتحرك فى الإتجاه الموجب لمحور ع ثلاث وحدات

(ج) لتحديد موضع النقطة ج (٠ ، ٠ ، ٤) نحدد النقطة (٠ ، ٠) فى المستوى س ص ثم نتحرك فى الإتجاه الموجب لمحور ع اربع وحدات







مثـــال:

أوجد بعد النقطة أ (–١ ، ٢ ، ٣) عن مستويات الإحداثيات وكذلك بعدها عن المحاور الثلاثة.

الحـــل:

- بعد أ (−١، ٢، ٣) عن المستوى س ص = |ع| = |٣| = ٣ وحدة طول
- بعد أ (−١، ٢، ٣) عن المستوى س ع = |ص| = |٢| = ٢ وحدة طول
- بعد أ (−١، ٢، ٣) عن المستوى ص ع = |س| = |−١| = ١ وحدة طول
- بعد أ (−١، ٢، ٣) عن محور س = $\sqrt{ص^2 + ع^2} = \sqrt{٢^2 + ٣^2} = \sqrt{١٣}$ وحدة طول
- بعد أ (−١، ٢، ٣) عن محور ص = $\sqrt{س^2 + ع^2} = \sqrt{(-١)^2 + ٣^2} = \sqrt{١٠}$ وحدة طول
- بعد أ (−١، ٢، ٣) عن محور ع = $\sqrt{س^2 + ص^2} = \sqrt{(-١)^2 + ٢^2} = \sqrt{٥}$ وحدة طول

✸ البعد بين نقطتين فى الفراغ:

إذا كانت أ (س$_1$، ص$_1$، ع$_1$) ، ب(س$_2$، ص$_2$، ع$_2$) نقطتين فى الفراغ فإن البعد بين النقطتين أ، ب يعطى بالعلاقة:

$$أب = \sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2 + (ع_2 - ع_1)^2}$$

مثال:

اثبت أن النقط أ (٧، ١، ٤)، ب (٨، ٢، ٨)، جـ (١٠، ٤، ١٦) تقع على إستقامة واحدة

الحل:

∵ البعد بين نقطتين = $\sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2 + (ع_2 - ع_1)^2}$

∴ أب = $\sqrt{(٧ - ٨)^2 + (١ - ٢)^2 + (٤ - ٨)^2} = ٣\sqrt{٢}$

، بجـ = $\sqrt{(٨ - ١٠)^2 + (٢ - ٤)^2 + (٨ - ١٦)^2} = ٦\sqrt{٢}$

، أجـ = $\sqrt{(٧ - ١٠)^2 + (١ - ٤)^2 + (٤ - ١٦)^2} = ٩\sqrt{٢}$

∵ أب + بجـ = $٣\sqrt{٢} + ٦\sqrt{٢} = ٩\sqrt{٢}$ ∴ أجـ = أب + بجـ

∴ النقط أ، ب، جـ تقع على إستقامة واحدة

لمعرفة هل أ ، ب ، جـ تقع على أستقامة واحدة أم لا نوجد أ ب ، ب جـ ، أ جـ
فإذا كان مجموع أصغر بعدين = البعد الاكبر فإن النقط تقع على استقامة واحدة
وإذا كان مجموع أصغر بعدين ≠ البعد الاكبر فإن النقط لا تقع على استقامة واحدة

مثـــال:

اثبت أن النقط أ (٤،٤،٠)، ب (٤،٠،٤)، جـ (٠،٤،٤) هى رؤوس لمثلث متساوى الأضلاع وأوجد مساحته

الحـــل:

$\because$ البعد بين نقطتين $= \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢ + (ع_٢ - ع_١)^٢}$

$\therefore$ أب $= \sqrt{(٤ - ٤)^٢ + (٤ - ٠)^٢ + (٠ - ٤)^٢} = ٤\sqrt{٢}$

، بجـ $= \sqrt{(٤ - ٠)^٢ + (٠ - ٤)^٢ + (٤ - ٤)^٢} = ٤\sqrt{٢}$

، أجـ $= \sqrt{(٤ - ٠)^٢ + (٤ - ٤)^٢ + (٠ - ٤)^٢} = ٤\sqrt{٢}$

$\therefore$ أب = بجـ = أجـ $\qquad \therefore \Delta$ أبجـ متساوى الأضلاع

$\therefore$ م$(\Delta$أبجـ$) = \frac{١}{٢}$ أب × بجـ جا ب $= \frac{١}{٢} \times ٤\sqrt{٢} \times ٤\sqrt{٢}$ جا ٦٠° $= ٨\sqrt{٣}$ وحدة مساحة

> **تذكر أن:** مساحة المثلث تساوى نصف حاصل ضرب طولا أى ضلعين فى جيب الزاوية المحصورة بينهما

مثـــال:

اثبت أن النقط أ (−٤،٤،١)، ب (٢،−١،٢)، جـ (−٢،٥،٠) رؤوس لمثلث قائم الزاوية وأوجد مساحته

الحـــل:

$\because$ البعد بين نقطتين $= \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢ + (ع_٢ - ع_١)^٢}$

$\therefore$ أب $= \sqrt{(-٤ - ٢)^٢ + (٤ + ١)^٢ + (١ - ٢)^٢} = \sqrt{٦٢}$ $\qquad \therefore$ (أب)$^٢ = ٦٢$

، بجـ $= \sqrt{(٢ + ٢)^٢ + (-١ - ٥)^٢ + (٢ - ٠)^٢} = \sqrt{٥٦}$ $\qquad \therefore$ (بجـ)$^٢ = ٥٦$

، أجـ $= \sqrt{(-٤ + ٢)^٢ + (٤ - ٥)^٢ + (١ - ٠)^٢} = \sqrt{٦}$ $\qquad \therefore$ (أجـ)$^٢ = ٦$

$\because$ (بجـ)^٢ + (أجـ)$^٢ = ٥٦ + ٦ = ٦٢$ $\qquad \therefore$ (أب)^٢ = (بجـ)^٢ + (أجـ)^٢

$\therefore \Delta$ أبجـ قائم الزاوية فى جـ

$\therefore$ م$(\Delta$أبجـ$) = \frac{١}{٢}$ أجـ × بجـ $= \frac{١}{٢} \times \sqrt{٦} \times \sqrt{٥٦} = ٢\sqrt{٢١}$ وحدة مساحة

لمعرفة نوع المثلث بالنسبة لزواياه نوجد أطوال أضلاعه الثلاثة فاذا كان:

(١) مربع الضلع الاكبر = مجموع مربعى الضلعين الاخرين فإن المثلث يكون قائم الزاوية

(٢) مربع الضلع الاكبر > مجموع مربعى الضلعين الاخرين فإن المثلث يكون منفرج الزاوية

(٣) مربع الضلع الاكبر < مجموع مربعى الضلعين الاخرين فإن المثلث يكون حاد الزوايا

مثــــال:

إذا كانت أ، ب، جـ، ء اربعة نقاط فى مستوى واحد فأثبت أن الشكل أبجء مربع حيث:

أ(٠،٤،١) ، ب(٢،٣،−١) ، جـ(٤،٥،٠) ، ء(٢،٦،٢)

الحــــل:

∵ البعد بين نقطتين $= \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢ + (ع_٢ - ع_١)^٢}$

∴ أب $= \sqrt{(٠ - ٢)^٢ + (٤ - ٣)^٢ + (١ + ١)^٢} = ٣$

، بجـ $= \sqrt{(٢ - ٤)^٢ + (٣ - ٥)^٢ + (-١ - ٠)^٢} = ٣$

، جـء $= \sqrt{(٤ - ٢)^٢ + (٥ - ٦)^٢ + (٠ - ٢)^٢} = ٣$

، أء $= \sqrt{(٠ - ٢)^٢ + (٤ - ٦)^٢ + (١ - ٢)^٢} = ٣$

∴ أب = بجـ = جـء = أء ∴ الشكل أبجء معين أو مربع

ولتحديد الشكل معين أو مربع نوجد طولا القطرين أجـ، بء

∴ أجـ $= \sqrt{(٠ - ٤)^٢ + (٤ - ٥)^٢ + (١ - ٠)^٢} = ٣\sqrt{٢}$

، بء $= \sqrt{(٢ - ٢)^٢ + (٣ - ٦)^٢ + (-١ - ٢)^٢} = ٣\sqrt{٢}$

∴ أب = بجـ = جـء = أء ، أجـ = بء ∴ الشكل أبجء مربع

لإثبات أن الشكل الرباعى أبجء :

(١) متوازى أضلاع نثبت أن كل ضلعين متقابلين متساويين

أى أن : أب = جـء ، بجـ = أء

(٢) مستطيل نثبت أن كل ضلعين متقابلين متساويين والقطران متساويان

أى أن: أب = جـء ، بجـ = أء ، أجـ = بء

(٣) معين نثبت أن الأضلاع الأربعة متساوية والقطران غير متساويين

أى أن : أب = بجـ = جـء = أء ، أجـ ≠ بء

(٤) مربع نثبت أن الأضلاع الأربعة متساوية والقطران متساويان

أى أن: أب = بجـ = جـء = أء ، أجـ = بء

✸ احداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة:

إذا كانت أ $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1 ، \text{ع}_1)$ ، ب $(\text{س}_2 ، \text{ص}_2 ، \text{ع}_2)$ نقطتين فى الفراغ فإن احداثيات نقطة جـ التى تقع فى منتصف $\overline{\text{أب}}$ هى:

$$\text{جـ} = \left(\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{2} ، \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{2} ، \frac{\text{ع}_1 + \text{ع}_2}{2} \right)$$

مثـــال:

اوجد إحداثيات نقطة منتصف جـ د حيث جـ (٠، ٤، −٢) ، د (−٦، ٣، ٤)

الحـــل:

∵ إحداثيات نقطة المنتصف $= \left(\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{2} ، \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{2} ، \frac{\text{ع}_1 + \text{ع}_2}{2} \right)$

∴ إحداثيات نقطة منتصف جـ د $= \left(\frac{0 - 6}{2} ، \frac{4 + 3}{2} ، \frac{-2 + 4}{2} \right) = \left(-3 ، \frac{7}{2} ، 1 \right)$

مثـــال:

إذا كانت جـ (٢، ٢، ٦) هى نقطة منتصف $\overline{\text{أب}}$ حيث أ (١، −٤، ٠) أوجد إحداثيات نقطة ب

الحـــل:

∵ إحداثيات نقطة المنتصف $= \left(\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{2} ، \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{2} ، \frac{\text{ع}_1 + \text{ع}_2}{2} \right)$

∴ $(2 ، 2 ، 6) = \left(\frac{1 + \text{س}_2}{2} ، \frac{-4 + \text{ص}_2}{2} ، \frac{0 + \text{ع}_2}{2} \right)$

∴ $\frac{1 + \text{س}_2}{2} = 2$ ‖ ∴ $\frac{-4 + \text{ص}_2}{2} = 2$ ‖ ∴ $\frac{0 + \text{ع}_2}{2} = 6$

∴ $1 + \text{س}_2 = 4$ ‖ ∴ $-4 + \text{ص}_2 = 4$ ‖ ∴ $\text{ع}_2 = 12$

∴ $\text{س}_2 = 3$ ‖ ∴ $\text{ص}_2 = 8$ ‖ ∴ ب $= (3 ، 8 ، 12)$

ملاحظة هامة:
إذا علمت إحداثيات نقطة المنتصف وإحداثيات أحد طرفى القطعة فإنه يمكن إيجاد إحداثيات الطرف الآخر كمايلى:
احداثيات أحد طرفى القطعة المستقيمة = ٢ × إحداثيات نقطة المنتصف − إحداثيات الطرف المعلوم

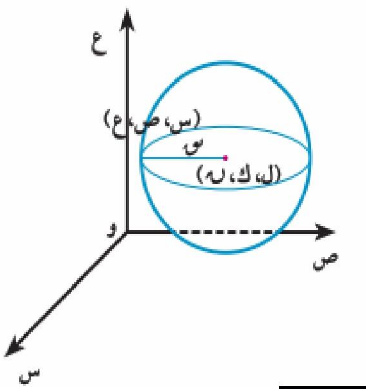
ففى المثال السابق نـجد أن:

احداثيات ب = ٢ × (٢، ٢، ٦) − (١، − ٤، ٠) = (٤، ٤، ١٢) − (١، − ٤، ٠) = (٣، ٨، ١٢)

✸ معادلة الكرة فى الفراغ:

الكرة هى مجموعة نقط الفراغ التى تبعد بعدا ثابتا عن نقطة ثابتة
تسمى النقطة الثابتة " مركز الكرة " ويسمى البعد الثابت " نصف قطر الكرة "

✸ الصورة القياسية لمعادلة الكرة:



إذا كان مركز الكرة النقطة (ل ، ك ، ن) ونصف قطرها نق

وكانت النقطة (س ، ص ، ع) تنتمى إلى الكرة

فبتطبيق قانون البعد بين نقطتين نـجد أن:

$$نق = \sqrt{(س - ل)^{٢} + (ص - ك)^{٢} + (ع - ن)^{٢}}$$

وبتربيع الطرفين نحصل على الصورة القياسية لمعادلة الكرة وهى:

$$(س - ل)^{٢} + (ص - ك)^{٢} + (ع - ن)^{٢} = نق^{٢}$$

حالة خاصة: إذا كان مركز الكرة هو نقطة الأصل (٠ ، ٠) فإن معادلة الكرة تكون:

$$س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} = نق^{٢}$$

✸ الصورة العامة لمعادلة الكرة:

الصورة العامة لمعادلة الكرة هى:

$$س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٢ل س + ٢ك ص + ٢ن ع + ء = ٠$$

حيث: المركز $(-ل ، -ك ، -ن)$ وطول نصف القطر $نق = \sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} + ن^{٢} - ء}$

اى أن المركز = (سالب نصف معامل س ، سالب نصف معامل ص ، سالب نصف معامل ع)

ونصف القطر = الجذر التربيعى (لمربع معامل س + مربع معامل ص + مربع معامل ع − الحد المطلق)

لاحظ انه $\because نق = \sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} + ن^{٢} - ء} \Leftarrow \therefore ء = ل^{٢} + ك^{٢} + ن^{٢} - نق^{٢}$

ملاحظة هامة:

لاحظ أن المعادلة العامة للكرة يجب أن تحقق الشروط الآتية:

١) أن تكون معادلة من الدرجة الثانية فى س ، ص ، ع

٢) أن يكون معامل $س^{٢}$ = معامل $ص^{٢}$ = معامل $ع^{٢}$ = ١

٣) أن لاتحتوى على حد يشتمل على س ص أو ص ع أو س ع

٤) أن يكون المقدار $ل^٢ + ك^٢ + ن^٢ - ء > ٠$ اى يكون موجب

مثـــال:

أوجد معادلة الكرة التى $\overline{أب}$ قطرا فيها حيث أ (−١، ٤، ٢) ، ب (٣، −٢، ٦)

الحـــل:

∵ $\overline{أب}$ قطر فى الكرة حيث أ (−١، ٤، ٢) ، ب (٣، −٢، ٦)

∴ مركز الكرة م هو منتصف $\overline{أب}$ وطول نصف قطرها يساوى البعد بين المركز م ونقطة أ أو ب

∴ $م = \left(\frac{-١ + ٣}{٢} ، \frac{٤ - ٢}{٢} ، \frac{٢ - ٦}{٢}\right) = (١ ، ١ ، -٢)$

، $نق = م أ = \sqrt{(-١ - ٣)^٢ + (٤ + ٢)^٢ + (٢ - ٦)^٢} = ٢\sqrt{١٧}$

∴ معادلة الكرة هى: $(س - ل)^٢ + (ص - ك)^٢ + (ع - ن)^٢ = نق^٢$

∴ $(س - ١)^٢ + (ص - ١)^٢ + (ع + ٢)^٢ = (٢\sqrt{١٧})^٢$

∴ $(س - ١)^٢ + (ص - ١)^٢ + (ع + ٢)^٢ = ٦٨$ #

مثـــال: عين مركز وطول نصف قطر الكرة التى معادلتها العامة هى:

$س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٦س - ٨ص + ٤ع + ١ = ٠$

الحـــل:

∵ إحداثيات مركز الكرة = $(\frac{-١}{٢}$ معامل س ، $\frac{-١}{٢}$ معامل ص ، $\frac{-١}{٢}$ معامل ع$)$

∴ احداثيات مركز الكرة = $(\frac{-١}{٢} \times ٦ ، \frac{-١}{٢} \times -٨ ، \frac{-١}{٢} \times ٤) = (-٣ ، ٤ ، -٢)$

∴ $نق = \sqrt{ل^٢ + ك^٢ + ن^٢ - ء} = \sqrt{(-٣)^٢ + (٤)^٢ + (-٢)^٢ - ١} = ٢\sqrt{٧}$ وحدة طول

✱ أوضاع خاصة للكرة:

أولا: الكرة التى يقع مركزها على أحد المحاور وتمس المستوى المار بالمحورين الآخرين:

مركز الكرة يقع على محور س والكرة تمس المستوى ص ع	مركز الكرة يقع على محور ص والكرة تمس المستوى س ع	مركز الكرة يقع على محور ع والكرة تمس المستوى س ص
المركز (أ، ٠، ٠) ، نق = |أ|	المركز (٠، ب، ٠) ، نق = |ب|	المركز (٠، ٠، جـ) ، نق = |جـ|

ثانيا:الكرة التى مركزها النقطة (أ، ب، جـ) وتمس أحد مستويات الإحداثيات:

إذا كانت تمس المستوى ص ع	إذا كانت تمس المستوى س ع	إذا كانت تمس المستوى س ص
∴ نق = |أ|	∴ نق = |ب|	∴ نق = |جـ|

ملاحظة:

الكرة التى تمس مستويات الإحداثيات الموجبة وطول نصف قطرها نق يكون مركزها (نق، نق، نق)

✱ الأوضاع النسبية لكرتين فى الفراغ:

إذا كان م، ن مركزى كرتين فى الفراغ نصفى قطريهما $نق_1$، $نق_2$ حيث $نق_1 > نق_2$ فإن:

وضع الكرتان	الشرط
الكرتان متباعدتان	م ن > $نق_1 + نق_2$
الكرتان متماستان من الخارج	م ن = $نق_1 + نق_2$
الكرتان متقاطعتان	$نق_1 - نق_2$ < م ن < $نق_1 + نق_2$
الكرتان متماستان من الداخل	م ن = $نق_1 - نق_2$
الكرتان متداخلتان	م ن < $نق_1 - نق_2$
الكرتان متحدتا المركز	م ن = ٠

🕮 مثـــال:

إذا كانت معادلتا كرتين هما: $(س - ٢)^٢ + (ص + ٤)^٢ + (ع - ٢)^٢ = ١$ ،

$(س + ٤)^٢ + (ص - ٤)^٢ + (ع - ٢)^٢ = ٤$ أوجد البعد بين مركزيهما وبين أنهما غير متقاطعتين

✍ الحـــل:

الكرة الأولى معادلتها: $(س - ٢)^٢ + (ص + ٤)^٢ + (ع - ٢)^٢ = ١$

∴ مركزها م = (٢، −٤، ٢) ، $نق_1 = \sqrt{١} = ١$ وحدة طول

الكرة الثانية معادلتها: $(س + ٤)^٢ + (ص - ٤)^٢ + (ع - ٢)^٢ = ٤$

∴ مركزها ن = (−٤، ٤، ٢) ، $نق_2 = \sqrt{٤} = ٢$ وحدة طول

∴ البعد بين المركزين م ن = $\sqrt{(٢ + ٤)^٢ + (-٤ - ٤)^٢ + (٢ - ٢)^٢} = ١٠$ وحدة طول

، ∵ $نق_1 + نق_2 = ١ + ٢ = ٣$ ∴ م ن > $نق_1 + نق_2$

∴ الكرتان متباعدتان وغير متقاطعتين

مثـــال: إذا كانت الكرتان: $(س - ١)^٢ + ص^٢ + (ع - ٣)^٢ = ١٦$

، $(س + ١)^٢ + (ص - ٢)^٢ + (ع - ك)^٢ = ٢٥$ متماستين فأوجد قيمة ك

الحـــل:

الكرة الأولى معادلتها: $(س - ١)^٢ + ص^٢ + (ع - ٣)^٢ = ١٦$

∴ مركزها م = (١، ٠، ٣) ، $نق_١ = \sqrt{١٦} = ٤$ وحدة طول

الكرة الثانية معادلتها: $(س + ١)^٢ + (ص - ٢)^٢ + (ع - ك)^٢ = ٢٥$

∴ مركزها ن = (−١، ٢، ك) ، $نق_٢ = \sqrt{٢٥} = ٥$ وحدة طول

∴ البعد بين المركزين م ن = $\sqrt{(١ + ١)^٢ + (٠ - ٢)^٢ + (٣ - ك)^٢} = \sqrt{٨ + (٣ - ك)^٢}$

∵ الكرتان متماستان ∴ الكرتان متماستان إما من الداخل أو من الخارج

الكرتان متماستان من الداخل	الكرتان متماستان من الخارج
∴ م ن = $نق_٢ - نق_١ = ٥ - ٤ = ١$	∴ م ن = $نق_٢ + نق_١ = ٥ + ٤ = ٩$
∴ $\sqrt{٨ + (٣ - ك)^٢} = ١$ بتربيع الطرفين	∴ $\sqrt{٨ + (٣ - ك)^٢} = ٩$ بتربيع الطرفين
∴ $٨ + (٣ - ك)^٢ = ١$	∴ $٨ + (٣ - ك)^٢ = ٨١$
∴ $(٣ - ك)^٢ = -٧$ (مرفوض)	∴ $(٣ - ك)^٢ = ٧٣$ ∴ $٣ - ك = \pm\sqrt{٧٣}$
	∴ $ك = ٣ \pm \sqrt{٧٣}$

مثـــال:

إذا قطع محور س الكرة: $(س - ٢)^٢ + (ص + ٣)^٢ + (ع - ١)^٢ = ١٤$ فى النقطتين أ، ب

أوجد طول $\overline{أب}$

الحـــل:

لإيجاد نقط التقاطع مع محور س نضع ص = ٠ ، ع = ٠

∴ $(س - ٢)^٢ + (٠ + ٣)^٢ + (٠ - ١)^٢ = ١٤$ ∴ $(س - ٢)^٢ + ١٠ = ١٤$

∴ $(س - ٢)^٢ = ١٤ - ١٠ = ٤$ ∴ $س - ٢ = \pm\sqrt{٤} = \pm ٢$

∴ س − ٢ = ٢ ∴ س = ٤ ∴ أ = (٤، ٠، ٠)

، ∴ س − ٢ = −٢ ∴ س = ٠ ∴ ب = (٠، ٠، ٠) ∴ أب = ٤ − ٠ = ٤ وحدة طول

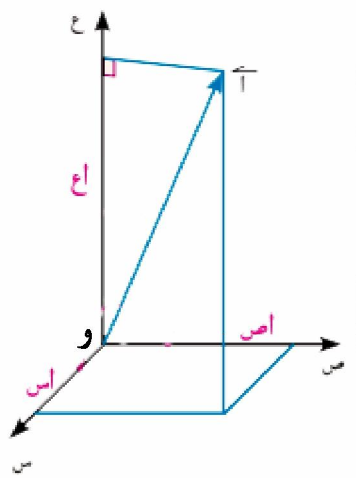
١ - ٢ المتجهات فى الفراغ

سبق أن درسنا الكميات القياسية والكميات المتجهه وعلمنا أن الكمية القياسية هى التى تتحدد بالمقدار فقط والكمية المتجهه تتحدد بالمقدار والإتجاه وعلمنا أن المتجه يمثل بقطعة مستقيمة موجهه وهى قطعة مستقيمة لها ثلاثة عناصر هى:
١) نقطة بداية ٢) نقطة نهاية ٣) إتجاه من نقطة البداية الى نقطة النهاية أى أن لها طول (مقدار) وإتجاه والقطعة المستقيمة الموجهه تتحقق أيضا فى الفراغ أى فى النظام الإحداثى ثلاثى الأبعاد

متجه الموضع فى الفراغ:

هو القطعة المستقيمة الموجهة التى بدايتها نقطة الأصل ونهايتها موضع (مكان) أى نقطة.

فمتجه الموضع للنقطة $أ = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ هو القطعة المستقيمة الموجهه $\overleftarrow{و أ}$



ويرمز لمتجه موضع النقطة أ بالرمز $\overleftarrow{أ}$ أى أن $\overleftarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$

حيث: $أ_س$ هى مركبة المتجه $\overleftarrow{أ}$ فى إتجاه محور س

، $أ_ص$ هى مركبة المتجه $\overleftarrow{أ}$ فى إتجاه محور ص

، $أ_ع$ هى مركبة المتجه $\overleftarrow{أ}$ فى إتجاه محور ع

معيار المتجه:

هو طول القطعه المستقيمة الموجهه التى تمثل المتجه

فإذا كان $\overleftarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ فإن معيار المتجه أ يرمز له بالرمز $\| \overleftarrow{أ} \|$ حيث:

$$\| \overleftarrow{أ} \| = \sqrt{أ_س^٢ + أ_ص^٢ + أ_ع^٢}$$

جمع المتجهات:

إذا كان $\overleftarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ ، $\overleftarrow{ب} = (ب_س ، ب_ص ، ب_ع)$ فإن:

$$\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع) + (ب_س ، ب_ص ، ب_ع) = (أ_س + ب_س ، أ_ص + ب_ص ، أ_ع + ب_ع)$$

أى إنه عند جمع المتجهات نجمع الإحداثيات المتناظرة

فمثلا: إذا كان $\overrightarrow{أ} = (٤، -٤، ٠)$ ، $\overrightarrow{ب} = (-١، ٥، ٢)$ فإن:

$\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} = (٤، -٤، ٠) + (-١، ٥، ٢) = (٣، ١، ٢)$

ضرب المتجه فى عدد حقيقى:

إذا كان $\overrightarrow{أ} = (أ_{س}، أ_{ص}، أ_{ع})$ ، ك ∈ ح فإن:

$$ك\,\overrightarrow{أ} = ك \times (أ_{س}، أ_{ص}، أ_{ع}) = (ك أ_{س}، ك أ_{ص}، ك أ_{ع})$$

أى إنه عند ضرب المتجه فى عدد حقيقى نضرب العدد فى الإحداثيات الثلاثة

مثـــال:

إذا كان $\overrightarrow{جـ} = (٢، -٣، ١)$ ، $\overrightarrow{ء} = (٠، ٢، -٢)$

أ) أوجد $٥\overrightarrow{جـ} - ٢\overrightarrow{ء}$ ب) إذا كان $٣\overrightarrow{أ} - ٤\overrightarrow{ء} = \overrightarrow{جـ}$ فأوجد $\overrightarrow{أ}$

الحـــل:

أ) $٥\overrightarrow{جـ} - ٢\overrightarrow{ء} = ٥(٢، -٣، ١) - ٢(٠، ٢، -٢)$

$= (١٠، -١٥، ٥) + (٠، -٤، ٤) = (١٠، -١٩، ٩)$

ب) ∵ $٣\overrightarrow{أ} - ٤\overrightarrow{ء} = \overrightarrow{جـ}$ ∴ $٣\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{جـ} + ٤\overrightarrow{ء}$ ∴ $\overrightarrow{أ} = \frac{١}{٣}(\overrightarrow{جـ} + ٤\overrightarrow{ء})$

∴ $\overrightarrow{أ} = \frac{١}{٣}((٢، -٣، ١) + ٤(٠، ٢، -٢))$

$= \frac{١}{٣}((٢، -٣، ١) + (٠، ٨، -٨)) = \frac{١}{٣}(٢، ٥، -٧) = (\frac{٢}{٣}، \frac{٥}{٣}، \frac{-٧}{٣})$

تساوى المتجهات:

إذا كان $\overrightarrow{أ} = (أ_{س}، أ_{ص}، أ_{ع})$ ، $\overrightarrow{ب} = (ب_{س}، ب_{ص}، ب_{ع})$ فإن:

$\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ب}$ إذا وفقط إذا كان $أ_{س} = ب_{س}$ ، $أ_{ص} = ب_{ص}$ ، $أ_{ع} = ب_{ع}$

أى أنه لكى يتساوى متجهان يجب أن تتساوى الإحداثيات المتناظرة

مثـــال:

إذا كان $(٢س + ١، ٥، ك+٤) = (-١، ص^{٢} - ٤، س + ١)$ فما قيمة س، ص، ك ؟

الحـــل:

$\because (٢س + ١، ٥، ك+٤) = (-١، ص^{٢} - ٤، س + ١)$

$\therefore ٢س + ١ = -١ \leftarrow \therefore ٢س = -١ - ١ = -٢ \leftarrow \therefore س = -١$

، $ص^{٢} - ٤ = ٥ \leftarrow \therefore ص^{٢} = ٥ + ٤ = ٩ \leftarrow \therefore ص = \pm\sqrt{٩} = \pm ٣$

، $ك+٤ = س + ١ \leftarrow \therefore ك+٤ = -١ + ١ = ٠ \leftarrow \therefore ك = -٤$

متجه الوحدة:

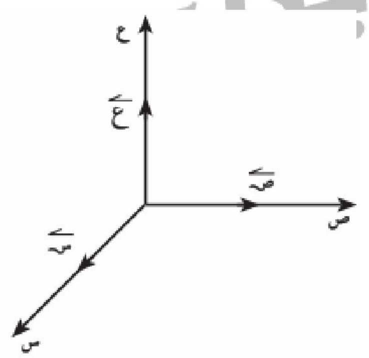
هو المتجه الذى معياره يساوى وحدة الأطوال

فمثلا:

$\vec{أ} = (\frac{١}{٣}، \frac{٢}{٣}، \frac{٢}{٣})$ ، $\|\vec{أ}\| = \sqrt{(\frac{١}{٣})^{٢} + (\frac{٢}{٣})^{٢} + (\frac{٢}{٣})^{٢}} = ١$ $\therefore$ $\vec{أ}$ متجه وحدة

$\vec{ب} = (\frac{١}{٥}، \frac{٤}{٥}، \frac{-\sqrt{٥}}{٥})$ ، $\|\vec{ب}\| = \sqrt{(\frac{١}{٥})^{٢} + (\frac{٤}{٥})^{٢} + (\frac{\sqrt{٥}}{٥})^{٢}} \neq ١$ $\therefore$ $\vec{ب}$ ليس متجه وحدة

متجهات الوحدة الأساسية:



هى قطع مستقيمة موجهه بدايتها نقطة الأصل ومعيارها وحدة الأطوال وإتجاهها هو الإتجاه الموجب لمحاور الإحداثيات س ، ص ، ع

ويرمز لها بالرموز $\vec{س}$ ، $\vec{ص}$ ، $\vec{ع}$ أى أن:

$\vec{س} = (١، ٠، ٠)$ ، $\vec{ص} = (٠، ١، ٠)$ ، $\vec{ع} = (٠، ٠، ١)$

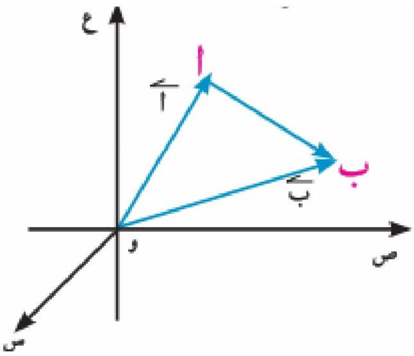
التعبير عن المتجة بدلالة متجهات الوحدة الأساسية:

إذا كان $\vec{أ} = (أ_{س}، أ_{ص}، أ_{ع})$ فإن: $\vec{أ} = أ_{س}\,\vec{س} + أ_{ص}\,\vec{ص} + أ_{ع}\,\vec{ع}$

فمثلا:

إذا كان $\vec{أ} = (٢، -٣، ٤)$ فإن: $\vec{أ} = ٢\vec{س} - ٣\vec{ص} + ٤\vec{ع}$

📖 المتجة الواصل بين نقطتين:



إذا كان أ ، ب نقطتين فى الفراغ ومتجها موضعهما هما: $\overrightarrow{\text{وأ}}$ ، $\overrightarrow{\text{وب}}$

فإن المتجه $\overrightarrow{\text{أب}}$ الواصل بينهما يمكن ايجاده كمايلى:

$\because$ $\overrightarrow{\text{وأ}} + \overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{وب}}$ من قاعدة جمع المتجهات

$\therefore$ $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{وب}} - \overrightarrow{\text{وأ}}$ وبصورة مختصرة $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}}$

اى أن:

المتجه الواصل بين نقطتين = إحداثيات النهاية – إحداثيات البداية

📖 مثـــــال:

أ) إذا كان أ = (٢، −٣، ٠) ، ب = (١، ٤، −١) أوجد $\overrightarrow{\text{أب}}$

ب) إذا كان أ = (١، ١، −٢) ، $\overrightarrow{\text{أب}}$ = (٤، −١، ٢) فأوجد إحداثيات نقطة ب

✍ الحـــل:

أ) $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}}$ = (١، ٤، −١) − (٢، −٣، ٠) = (−١، ٧، −١)

ب) $\because$ $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}}$

$\therefore$ (٤، −١، ٢) = $\overrightarrow{\text{ب}}$ − (١، ١، −٢)

$\therefore$ $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٤، −١، ٢) + (١، ١، −٢) = (٥، ٠، ٠) ← $\therefore$ ب = (٥، ٠، ٠)

📖 متجه الوحدة فى إتجاه معلوم:

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ($\text{أ}_{\text{س}}$ ، $\text{أ}_{\text{ص}}$ ، $\text{أ}_{\text{ع}}$) $\in$ ع^3 فإن متجه الوحدة فى إتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ يرمز له بالرمز $\overrightarrow{\text{ى}}_{\text{أ}}$

يعطى بالعلاقة: $\overrightarrow{\text{ى}}_{\text{أ}} = \dfrac{\overrightarrow{\text{أ}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\|}$ اى أن **متجه الوحدة = $\dfrac{\text{المتجـه}}{\text{معياره}}$**

مثـــال:

أوجد متجه الوحدة فى إتجاه كل من المتجهات الآتية:

(أ) $\overrightarrow{\text{أ}} = (٨، -٤، -٨)$ (ب) $\overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{س}} - ٢\overrightarrow{\text{ص}} - \overrightarrow{\text{ع}}$ (جـ) $\overrightarrow{\text{جـ}} = ٣\overrightarrow{\text{س}} - ٤\overrightarrow{\text{ع}}$

الحـــل:

(أ) $\because \overrightarrow{\text{أ}} = (٨، -٤، -٨) \quad \therefore \|\overrightarrow{\text{أ}}\| = \sqrt{(٨)^{٢} + (-٤)^{٢} + (-٨)^{٢}} = ١٢$

$\therefore \text{ى}_{\text{أ}} = \frac{\overrightarrow{\text{أ}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\|} = \frac{(٨، -٤، -٨)}{١٢} = (\frac{٢}{٣}، \frac{-١}{٣}، \frac{-٢}{٣})$

(ب) $\because \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{س}} - ٢\overrightarrow{\text{ص}} - \overrightarrow{\text{ع}} \quad \therefore \|\overrightarrow{\text{ب}}\| = \sqrt{(١)^{٢} + (-٢)^{٢} + (-١)^{٢}} = \sqrt{٦}$

$\therefore \text{ى}_{\text{ب}} = \frac{\overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{ب}}\|} = \frac{\overrightarrow{\text{س}} - ٢\overrightarrow{\text{ص}} - \overrightarrow{\text{ع}}}{\sqrt{٦}}$

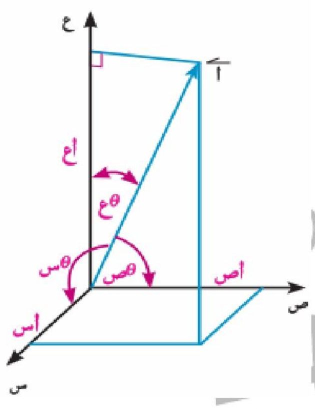
(جـ) $\because \overrightarrow{\text{جـ}} = ٣\overrightarrow{\text{س}} - ٤\overrightarrow{\text{ع}} \quad \therefore \|\overrightarrow{\text{جـ}}\| = \sqrt{(٣)^{٢} + (٠)^{٢} + (-٤)^{٢}} = ٥$

$\therefore \text{ى}_{\text{جـ}} = \frac{\overrightarrow{\text{جـ}}}{\|\overrightarrow{\text{جـ}}\|} = \frac{٣\overrightarrow{\text{س}} - ٤\overrightarrow{\text{ع}}}{٥} = \frac{٣}{٥}\overrightarrow{\text{س}} - \frac{٤}{٥}\overrightarrow{\text{ع}}$

زوايا الإتجاه وجيوب تمام الإتجاه لمتجه فى الفراغ:

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}}، \text{أ}_{\text{ص}}، \text{أ}_{\text{ع}})$ متجه فى الفراغ وكانت $(\theta_{\text{س}}، \theta_{\text{ص}}، \theta_{\text{ع}})$

قياسات الزوايا التى يصنعها مع الإتجاه الموجب لمحاور س ، ص ، ع على الترتيب فإن:



$\text{أ}_{\text{س}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\| \text{جتا}\theta_{\text{س}}$ ، $\text{أ}_{\text{ص}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\| \text{جتا}\theta_{\text{ص}}$ ، $\text{أ}_{\text{ع}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\| \text{جتا}\theta_{\text{ع}}$

$\therefore \overrightarrow{\text{أ}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\| \text{جتا}\theta_{\text{س}} \overrightarrow{\text{س}} + \|\overrightarrow{\text{أ}}\| \text{جتا}\theta_{\text{ص}} \overrightarrow{\text{ص}} + \|\overrightarrow{\text{أ}}\| \text{جتا}\theta_{\text{ع}} \overrightarrow{\text{ع}}$

$$\therefore \overrightarrow{\text{أ}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\| (\text{جتا}\theta_{\text{س}} \overrightarrow{\text{س}} + \text{جتا}\theta_{\text{ص}} \overrightarrow{\text{ص}} + \text{جتا}\theta_{\text{ع}} \overrightarrow{\text{ع}})$$

$\because \text{ى}_{\text{أ}} = \frac{\overrightarrow{\text{أ}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\|} \leftarrow \therefore \text{ى}_{\text{أ}} = \frac{\overrightarrow{\text{أ}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\|} = (\text{جتا}\theta_{\text{س}} \overrightarrow{\text{س}} + \text{جتا}\theta_{\text{ص}} \overrightarrow{\text{ص}} + \text{جتا}\theta_{\text{ع}} \overrightarrow{\text{ع}})$

∴ ($جتا\theta_س \overset{\leftharpoonup}{س} + جتا\theta_ص \overset{\leftharpoonup}{ص} + جتا\theta_ع \overset{\leftharpoonup}{ع}$) تمثل متجه الوحدة فى إتجاه المتجه $\overset{\leftharpoonup}{أ}$

$$\therefore جتا^2\theta_س + جتا^2\theta_ص + جتا^2\theta_ع = ١$$

الزوايا ($\theta_س$ ، $\theta_ص$ ، $\theta_ع$) تسمى زوايا الإتجاه للمتجه $\overset{\leftharpoonup}{أ}$

، ($جتا\theta_س$ ، $جتا\theta_ص$ ، $جتا\theta_ع$) تسمى جيوب تمام الإتجاه للمتجه $\overset{\leftharpoonup}{أ}$

مثـــال:

أوجد جيوب تمام الإتجاه وزوايا الإتجاه للمتجه $\overset{\leftharpoonup}{أ} = (٢ ، -٢ ، ٢\sqrt{٢})$

الحـــل:

$\because \overset{\leftharpoonup}{أ} = (٢ ، -٢ ، ٢\sqrt{٢})$ $\therefore || \overset{\leftharpoonup}{أ} || = \sqrt{(٢)^٢ + (-٢)^٢ + (٢\sqrt{٢})^٢} = ٤$

$$\therefore \overset{\leftharpoonup}{ى}_أ = \frac{\overset{\leftharpoonup}{أ}}{|| \overset{\leftharpoonup}{أ} ||} = \frac{(٢ ، -٢ ، ٢\sqrt{٢})}{٤} = (\frac{١}{٢} ، \frac{-١}{٢} ، \frac{\sqrt{٢}}{٢})$$

∴ جيوب تمام الإتجاه للمتجه $\overset{\leftharpoonup}{أ}$ هى $(\frac{١}{٢} ، \frac{-١}{٢} ، \frac{\sqrt{٢}}{٢})$

$\therefore جتا\theta_س = \frac{١}{٢}$ ومنها $\theta_س = جتا^{-١}(\frac{١}{٢}) = ٦٠°$

، $جتا\theta_ص = \frac{-١}{٢}$ ومنها $\theta_ص = جتا^{-١}(\frac{-١}{٢}) = ١٢٠°$

، $جتا\theta_ع = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ومنها $\theta_ع = جتا^{-١}(\frac{\sqrt{٢}}{٢}) = ٤٥°$

∴ زوايا الإتجاه للمتجه $\overset{\leftharpoonup}{أ}$ هى (٦٠° ، ١٢٠° ، ٤٥°)

مثـــال:

إذا كان المتجه $\overset{\leftharpoonup}{أ}$ يصنع مع الإتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات س ، ص ، ع زوايا قياساتها ٦٠° ، ٨٠° ، θ حيث θ زاوية حادة

(أ) أوجد قيمة θ (ب) اكتب الصورة الجبرية للمتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ إذا علمت أن $||\overrightarrow{\text{أ}}|| = ١٣$

الحل:

(أ) ∵ $\text{جتا}^2\theta_{\text{س}} + \text{جتا}^2\theta_{\text{ص}} + \text{جتا}^2\theta_{\text{ع}} = ١$ ∴ $\text{جتا}^2 ٦٠^\circ + \text{جتا}^2 ٨٠^\circ + \text{جتا}^2\theta = ١$

∴ $٠,٢٥ + ٠,٠٣ + \text{جتا}^2\theta = ١$ ∴ $\text{جتا}^2\theta = ١ - ٠,٢٨ = ٠,٧٢$

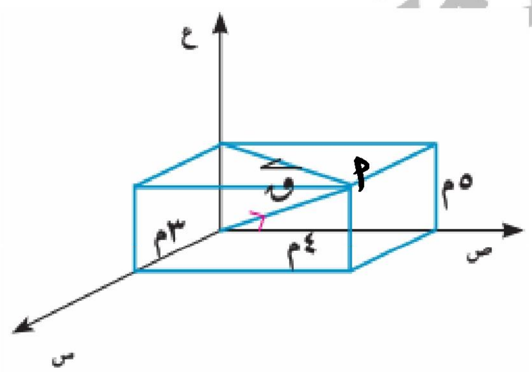
∴ $\text{جتا}\theta = \sqrt{٠,٧٢} = ٠,٨٤٨٥$ ∴ $\theta = \text{جتا}^{-1}(٠,٨٤٨٥) = ٣١,٩٥^\circ$

(ب) ∵ $\overrightarrow{\text{أ}} = ||\overrightarrow{\text{أ}}||(\text{جتا}\theta_{\text{س}}\,\overrightarrow{\text{س}} + \text{جتا}\theta_{\text{ص}}\,\overrightarrow{\text{ص}} + \text{جتا}\theta_{\text{ع}}\,\overrightarrow{\text{ع}})$

∴ $\overrightarrow{\text{أ}} = ١٣(\text{جتا}\,٦٠^\circ\,\overrightarrow{\text{س}} + \text{جتا}\,٨٠^\circ\,\overrightarrow{\text{ص}} + \text{جتا}\,٣١,٩٥^\circ\,\overrightarrow{\text{ع}})$

∴ $\overrightarrow{\text{أ}} = ٦,٥\,\overrightarrow{\text{س}} + ٢,٢٦\,\overrightarrow{\text{ص}} + ١١,٠٣\,\overrightarrow{\text{ع}}$

مثال:



الشكل المقابل يمثل قوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ مقدارها ٢٠٠ نيوتن:

(أ) عبر عن القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ بالصورة الجبرية

(ب) أوجد قياسات زوايا الإتجاه للقوة $\overrightarrow{\text{ق}}$

الحل:

(أ) بفرض أن $\overrightarrow{\text{أ}}$ يمثل متجه موضع النقطة أ

∴ $\overrightarrow{\text{أ}} = ٣\,\overrightarrow{\text{س}} + ٤\,\overrightarrow{\text{ص}} + ٥\,\overrightarrow{\text{ع}}$ ∴ $||\overrightarrow{\text{أ}}|| = \sqrt{(٣)^2 + (٤)^2 + (٥)^2} = ٥\sqrt{٢}$

∴ $\overrightarrow{\text{ى}_{\text{م}}} = \frac{\overrightarrow{\text{أ}}}{||\overrightarrow{\text{أ}}||} = \frac{٣\,\overrightarrow{\text{س}} + ٤\,\overrightarrow{\text{ص}} + ٥\,\overrightarrow{\text{ع}}}{٥\sqrt{٢}} = \frac{٣\sqrt{٢}}{١٠}\overrightarrow{\text{س}} + \frac{٤\sqrt{٢}}{١٠}\overrightarrow{\text{ص}} + \frac{٥\sqrt{٢}}{١٠}\overrightarrow{\text{ع}}$

∴ $\overrightarrow{\text{ق}} = (||\overrightarrow{\text{ق}}||)\overrightarrow{\text{ى}_{\text{م}}} = ٢٠٠\left(\frac{٣\sqrt{٢}}{١٠}\overrightarrow{\text{س}} + \frac{٤\sqrt{٢}}{١٠}\overrightarrow{\text{ص}} + \frac{٥\sqrt{٢}}{١٠}\overrightarrow{\text{ع}}\right)$

∴ $\overrightarrow{\text{ق}} = ٦٠\sqrt{٢}\,\overrightarrow{\text{س}} + ٨٠\sqrt{٢}\,\overrightarrow{\text{ص}} + ١٠٠\sqrt{٢}\,\overrightarrow{\text{ع}}$

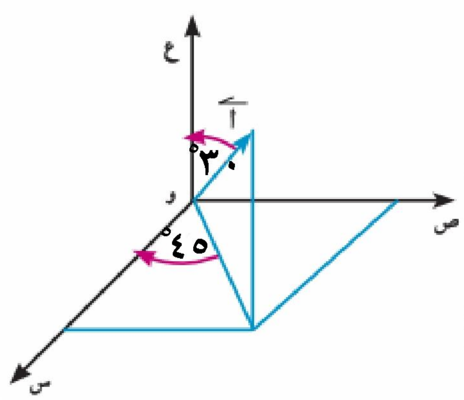
(ب) ∵ $\overrightarrow{\text{ى}_{\text{ق}}} = \overrightarrow{\text{ى}_{\text{م}}}$ ∴ $\overrightarrow{\text{ى}_{\text{ق}}} = \frac{٣\sqrt{٢}}{١٠}\overrightarrow{\text{س}} + \frac{٤\sqrt{٢}}{١٠}\overrightarrow{\text{ص}} + \frac{٥\sqrt{٢}}{١٠}\overrightarrow{\text{ع}}$

$\therefore$ جتا $\theta_{\text{س}} = \frac{٣\sqrt{٢}}{١٠}$ ومنها $\theta_{\text{س}} =$ جتا$^{-1}\left(\frac{٣\sqrt{٢}}{١٠}\right) = ٦٤,٨٩٦^\circ$

، جتا $\theta_{\text{ص}} = \frac{٤\sqrt{٢}}{١٠}$ ومنها $\theta_{\text{ص}} =$ جتا$^{-1}\left(\frac{٤\sqrt{٢}}{١٠}\right) = ٥٥,٥٥^\circ$

، جتا $\theta_{\text{ع}} = \frac{٥\sqrt{٢}}{١٠}$ ومنها $\theta_{\text{ع}} =$ جتا$^{-1}\left(\frac{٥\sqrt{٢}}{١٠}\right) = ٤٥^\circ$

مثـــال:



الشكل المقابل يمثل متجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ معياره ١٠ وحدات:

(أ) عبر عن المتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ بالصورة الجبرية (المركبات الكارتيزية)

(ب) أوجد قياسات زوايا الإتجاه للمتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$

الحـــل:

(أ) نحلل $\overleftarrow{\text{أ}}$ إلى مركبتين: المركبة الأولى فى إتجاه $\overleftarrow{\text{وع}}$ ومقدارها $\text{أ}_{\text{ع}}$ حيث:

$$\text{أ}_{\text{ع}} = \|\overleftarrow{\text{أ}}\| \text{جتا}\,\theta_{\text{ع}} = ١٠ \text{ جتا } ٣٠^\circ = ٥\sqrt{٣}$$

والمركبة الثانية تقع فى المستوى س ص ومقدارها $\text{أ}_{\text{س ص}}$ حيث:

$$\text{أ}_{\text{س ص}} = \|\overleftarrow{\text{أ}}\| \text{جا}\,\theta_{\text{ع}} = ١٠ \text{ جا } ٣٠^\circ = ٥$$

ثم نقوم بتحليل المركبة $\text{أ}_{\text{س ص}}$ إلى مركبتين: المركبة الأولى فى إتجاه $\overleftarrow{\text{وس}}$ ومقدارها $\text{أ}_{\text{س}}$ حيث:

$$\text{أ}_{\text{س}} = \|\overleftarrow{\text{أ}}_{\text{س ص}}\| \text{جتا } ٤٥^\circ = ٥ \text{ جتا } ٤٥^\circ = \frac{٥\sqrt{٢}}{٢}$$

والمركبة الثانية فى إتجاه $\overleftarrow{\text{وص}}$ ومقدارها $\text{أ}_{\text{ص}}$ حيث:

$$\text{أ}_{\text{ص}} = \|\overleftarrow{\text{أ}}_{\text{س ص}}\| \text{جا } ٤٥^\circ = ٥ \text{ جا } ٤٥^\circ = \frac{٥\sqrt{٢}}{٢}$$

$$\therefore \overleftarrow{\text{أ}} = \frac{٥\sqrt{٢}}{٢}\overleftarrow{\text{س}} + \frac{٥\sqrt{٢}}{٢}\overleftarrow{\text{ص}} + ٥\sqrt{٣}\,\overleftarrow{\text{ع}}$$

(ب) لايجاد قياسات زوايا الإتجاه نوجد متجه الوحده فى إتجاه المتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$

$\therefore \overrightarrow{ى_م} = \frac{\overrightarrow{أ}}{\|\overrightarrow{أ}\|} = \frac{١}{١٠}(\frac{٥\sqrt{٢}}{٢}\overrightarrow{س} + \frac{٥\sqrt{٢}}{٢}\overrightarrow{ص} + ٥\sqrt{٣}\,\overrightarrow{ع})$

$= \frac{\sqrt{٢}}{٤}\overrightarrow{س} + \frac{\sqrt{٢}}{٤}\overrightarrow{ص} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}\overrightarrow{ع}$

$\therefore$ جتا$\theta_س = \frac{\sqrt{٢}}{٤}$ ومنها $\theta_س =$ جتا$^{-١}(\frac{\sqrt{٢}}{٤}) = ٦٩,٣^\circ$

، جتا$\theta_ص = \frac{\sqrt{٢}}{٤}$ ومنها $\theta_ص =$ جتا$^{-١}(\frac{\sqrt{٢}}{٤}) = ٦٩,٣^\circ$

، جتا$\theta_ع = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ومنها $\theta_ع =$ جتا$^{-١}(\frac{\sqrt{٣}}{٢}) = ٣٠^\circ$

مثـــال:

أوجد الصورة الجبرية للمتجه $\overrightarrow{أ}$ الذى معياره ٥ وحدات ويصنع مع محاور الإحداثيات زوايا إتجاه متساوية فى القياس.

الحـــل:

$\because$ زوايا الإتجاه متساوية فى القياس $\therefore \theta_س = \theta_ص = \theta_ع = \theta$

$\because$ جتا$^٢\theta_س +$ جتا$^٢\theta_ص +$ جتا$^٢\theta_ع = ١$ $\therefore$ جتا$^٢\theta +$ جتا$^٢\theta +$ جتا$^٢\theta = ١$

$\therefore ٣$جتا$^٢\theta = ١$ $\therefore$ جتا$^٢\theta = \frac{١}{٣}$ $\therefore$ جتا$\theta = \pm\frac{١}{\sqrt{٣}} = \pm\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

$\therefore \overrightarrow{أ} = \|\overrightarrow{أ}\|($جتا$\theta\,\overrightarrow{س} +$ جتا$\theta\,\overrightarrow{ص} +$ جتا$\theta\,\overrightarrow{ع})$

$\therefore \overrightarrow{أ} = ٥\times(\frac{\sqrt{٣}}{٣}\overrightarrow{س} + \frac{\sqrt{٣}}{٣}\overrightarrow{ص} + \frac{\sqrt{٣}}{٣}\overrightarrow{ع})$

$\therefore \overrightarrow{أ} = \frac{٥\sqrt{٣}}{٣}\overrightarrow{س} + \frac{٥\sqrt{٣}}{٣}\overrightarrow{ص} + \frac{٥\sqrt{٣}}{٣}\overrightarrow{ع}$

أو

$\therefore \overrightarrow{أ} = \frac{-٥\sqrt{٣}}{٣}\overrightarrow{س} - \frac{٥\sqrt{٣}}{٣}\overrightarrow{ص} - \frac{٥\sqrt{٣}}{٣}\overrightarrow{ع}$

مثـــــال:

إذا كانت $\theta_{س}$ ، $\theta_{ص}$ ، $\theta_{ع}$ هى زوايا الإتجاه لمتجه مع محاور الإحداثيات الموجبة إثبت أن:

١) جا$^{٢}\theta_{س}$ + جا$^{٢}\theta_{ص}$ + جا$^{٢}\theta_{ع}$ = ٢

٢) جتا ٢$\theta_{س}$ + جتا ٢$\theta_{ص}$ + جتا ٢$\theta_{ع}$ + ١ = ٠

الحـــــل:

∵ $\theta_{س}$ ، $\theta_{ص}$ ، $\theta_{ع}$ هى زوايا الإتجاه

∴ جتا$^{٢}\theta_{س}$ + جتا$^{٢}\theta_{ص}$ + جتا$^{٢}\theta_{ع}$ = ١

١) الطرف الأيمن = جا$^{٢}\theta_{س}$ + جا$^{٢}\theta_{ص}$ + جا$^{٢}\theta_{ع}$ ، ∵ جا$^{٢}\theta$ = ١ − جتا$^{٢}\theta$

= (١ − جتا$^{٢}\theta_{س}$) + (١ − جتا$^{٢}\theta_{ص}$) + (١ − جتا$^{٢}\theta_{ع}$)

= ٣ − (جتا$^{٢}\theta_{س}$ + جتا$^{٢}\theta_{ص}$ + جتا$^{٢}\theta_{ع}$) = ٣ − ١ = ٢

∴ جا$^{٢}\theta_{س}$ + جا$^{٢}\theta_{ص}$ + جا$^{٢}\theta_{ع}$ = ٢

٢) الطرف الأيمن = جتا ٢$\theta_{س}$ + جتا ٢$\theta_{ص}$ + جتا ٢$\theta_{ع}$ + ١ ، ∵ جتا٢θ = ٢ جتا$^{٢}\theta$ − ١

= (٢جتا$^{٢}\theta_{س}$ − ١) + (٢ جتا$^{٢}\theta_{ص}$ − ١) + (٢ جتا$^{٢}\theta_{ع}$ − ١) + ١

= ٢جتا$^{٢}\theta_{س}$ + ٢ جتا$^{٢}\theta_{ص}$ + ٢ جتا$^{٢}\theta_{ع}$ − ٢

= ٢(جتا$^{٢}\theta_{س}$ + جتا$^{٢}\theta_{ص}$ + جتا$^{٢}\theta_{ع}$) − ٢ = ٢ × ١ − ٢ = ٠

∴ جتا ٢$\theta_{س}$ + جتا ٢$\theta_{ص}$ + جتا ٢$\theta_{ع}$ + ١ = ٠

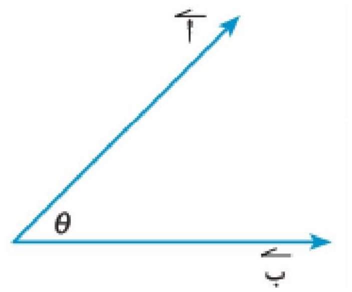
تذكر أن:

١) جتا$^{٢}\theta$ + جا$^{٢}\theta$ = ١ ومنها جا$^{٢}\theta$ = ١ − جتا$^{٢}\theta$ ، جتا$^{٢}\theta$ = ١ − جا$^{٢}\theta$

٢) جتا ٢θ = جتا$^{٢}\theta$ − جا$^{٢}\theta$ ، جتا ٢θ = ٢ جتا$^{٢}\theta$ − ١ ، جتا ٢θ = ١ − ٢ جا$^{٢}\theta$

١ - ٣ ضرب المتجهات

الضرب القياسى لمتجهين:



إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متجهين قياس الزاوية بينهما θ فإن:
مساحة المستطيل الذى بعداه معيار أحد المتجهين ومركبة المتجه الآخر عليه

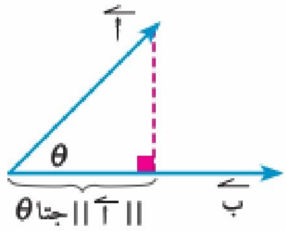
تعرف بالضرب القياسى للمتجهين ويرمز له بالرمز $\overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}}$ أى أن:

$$\overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\| \, \|\overrightarrow{\text{ب}}\| \text{ جتا}\theta$$

أى أن:

الضرب القياسى لمتجهين يساوى معيار الأول × معيار الثانى × جيب تمام الزاوية المحصورة بينهما.

لاحظ أن :



$\|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ جتاθ تمثل مركبة المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ فى إتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{ب}}$

، $\|\overrightarrow{\text{ب}}\|$ جتاθ تمثل مركبة المتجه $\overrightarrow{\text{ب}}$ فى إتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$

مثـــال:

إذا كانت $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متجهين وقياس الزاوية بينهما ١٣٥° وكان $\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = ٦$ ، $\|\overrightarrow{\text{ب}}\| = ١٠$

أوجد $\overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}}$

الحـــل:

$\because$ $\overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\| \, \|\overrightarrow{\text{ب}}\|$ جتاθ

$\therefore$ $\overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}} = ٦ \times ١٠$ جتا ١٣٥° $= -٣٠\sqrt{٢}$

ملاحظات هامة:

١) لتحديد الزاوية بين المتجهين يجب أن يكون المتجهان خارجين من (أو داخلين إلى) نفس النقطة
أى أن المتجهين يكون لهما نفس نقطة البداية أو يكون لهما نفس نقطة النهاية

٢) قياس الزاوية بين المتجهين $\in [٠ ، \pi]$

خواص الضرب القياسى لمتجهين:

١) $\overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{ب}} \bullet \overrightarrow{\text{أ}}$ أى أن الضرب القياسى لمتجهين عملية إبدالية

٢) $\overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{أ}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\|^{2}$ أى أن الضرب القياسى لمتجه فى نفسه يساوى مربع معياره

٣) $\overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}} = 0$ إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متعامدين (شرط تعامد متجهين)

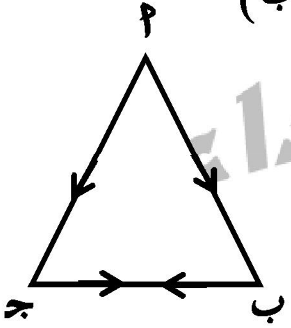
٤) $\overrightarrow{\text{أ}} \bullet (\overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{ج}}) = \overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ج}}$ خاصية التوزيع

٥) $(\text{ك}\,\overrightarrow{\text{أ}}) \bullet \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{أ}} \bullet (\text{ك}\,\overrightarrow{\text{ب}}) = \text{ك}\,(\overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}})$ حيث ك عدد حقيقى

مثـــال:

أ ب ج مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٨ سم أوجد كلا من:

(أ) $\overrightarrow{\text{أب}} \bullet \overrightarrow{\text{أج}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{أب}} \bullet \overrightarrow{\text{بج}}$ (ج) $(2\,\overrightarrow{\text{أب}}) \bullet (3\,\overrightarrow{\text{جب}})$



الحـــل:

(أ) ∵ $\overrightarrow{\text{أب}} \bullet \overrightarrow{\text{أج}}$ لهما نفس نقطة البداية ∴ قياس الزاوية ٦٠°

∴ $\overrightarrow{\text{أب}} \bullet \overrightarrow{\text{أج}} = \|\overrightarrow{\text{أب}}\|\,\|\overrightarrow{\text{أج}}\|\ \text{جتا}\ 60^\circ = 8 \times 8 \times \frac{1}{2} = 32$

(ب) ∵ $\overrightarrow{\text{أب}} \bullet \overrightarrow{\text{بج}}$ ليس لهما نفس نقطة البداية وليس لهما نفس نقطة النهاية

∴ نمد أحد المتجهين للحصول على قياس الزاوية بين المتجهين فيكون قياس الزاوية ١٢٠°

أو نبدل رموز أحد المتجهين فيكون قياس الزاوية ٦٠°

∴ $\overrightarrow{\text{أب}} \bullet \overrightarrow{\text{بج}} = \|\overrightarrow{\text{أب}}\|\,\|\overrightarrow{\text{بج}}\|\ \text{جتا}\ 120^\circ = 8 \times 8 \times \frac{-1}{2} = -32$

أو $\overrightarrow{\text{أب}} \bullet \overrightarrow{\text{بج}} = \overrightarrow{\text{أب}} \bullet (-\overrightarrow{\text{جب}}) = -\|\overrightarrow{\text{أب}}\|\,\|\overrightarrow{\text{جب}}\|\ \text{جتا}\ 60^\circ = -8 \times 8 \times \frac{1}{2} = -32$

(ج) ∵ $(2\,\overrightarrow{\text{أب}}) \bullet (3\,\overrightarrow{\text{جب}})$ لهما نفس نقطة النهاية ∴ قياس الزاوية ٦٠°

∴ $(2\,\overrightarrow{\text{أب}}) \bullet (3\,\overrightarrow{\text{جب}}) = (2 \times 3)(\overrightarrow{\text{أب}} \bullet \overrightarrow{\text{جب}})$

= ٦ || $\overrightarrow{\text{أب}}$ || || $\overrightarrow{\text{جب}}$ || جتا ٦٠° = ٦ × ٨ × ٨ × $\frac{١}{٢}$ = ١٩٢

الضرب القياسى لمتجهات الوحدة الأساسية:

إذا كان $\overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ع}}$ مجموعة يمينية لمتجهات الوحدة الأساسية فإن:

$\overrightarrow{\text{س}} \bullet \overrightarrow{\text{س}}$ = ١ × ١ × جتا٠ = ١ × ١ × ١ = ١ ، $\overrightarrow{\text{س}} \bullet \overrightarrow{\text{ص}}$ = ١ × ١ × جتا ٩٠° = ١ × ١ × ٠ = ٠

وبصفة عامة يكون

$\overrightarrow{\text{س}} \bullet \overrightarrow{\text{س}} = \overrightarrow{\text{ص}} \bullet \overrightarrow{\text{ص}} = \overrightarrow{\text{ع}} \bullet \overrightarrow{\text{ع}} = ١$	$\overrightarrow{\text{س}} \bullet \overrightarrow{\text{ص}} = \overrightarrow{\text{س}} \bullet \overrightarrow{\text{ع}} = \overrightarrow{\text{ع}} \bullet \overrightarrow{\text{ص}} = ٠$

الضرب القياسى لمتجهين فى النظام الإحداثى المتعامد:

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = \text{أ}_{\text{س}}\overrightarrow{\text{س}} + \text{أ}_{\text{ص}}\overrightarrow{\text{ص}} + \text{أ}_{\text{ع}}\overrightarrow{\text{ع}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = \text{ب}_{\text{س}}\overrightarrow{\text{س}} + \text{ب}_{\text{ص}}\overrightarrow{\text{ص}} + \text{ب}_{\text{ع}}\overrightarrow{\text{ع}}$ فإن:

$$\overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}} = \text{أ}_{\text{س}}\,\text{ب}_{\text{س}} + \text{أ}_{\text{ص}}\,\text{ب}_{\text{ص}} + \text{أ}_{\text{ع}}\,\text{ب}_{\text{ع}}$$

أى أن الضرب القياسى لمتجهين يساوى مجموع حواصل ضرب الإحداثيات المتناظرة

ملاحظة:

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ($\text{أ}_{\text{س}}$ ، $\text{أ}_{\text{ص}}$) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ($\text{ب}_{\text{س}}$ ، $\text{ب}_{\text{ص}}$) فى المستوى الإحداثى فإن:

$$\overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}} = \text{أ}_{\text{س}}\,\text{ب}_{\text{س}} + \text{أ}_{\text{ص}}\,\text{ب}_{\text{ص}}$$

مثـــــال:

أوجد $\overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}}$ فى كل من الحالات الآتية:

(أ) $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (–١ ، ٣ ، ٢) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ٤$\overrightarrow{\text{س}}$ – ٢$\overrightarrow{\text{ص}}$ + ٥$\overrightarrow{\text{ع}}$ ماذا تستنتج؟

(ب) $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ٢$\overrightarrow{\text{س}}$ – $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = $\overrightarrow{\text{ص}}$ – ٣$\overrightarrow{\text{س}}$

الحـــــل:

(أ) ∵ $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (–١ ، ٣ ، ٢) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ٤$\overrightarrow{\text{س}}$ – ٢$\overrightarrow{\text{ص}}$ + ٥$\overrightarrow{\text{ع}}$

∴ $\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب} = -١ \times ٤ + ٣ \times (-٢) + ٢ \times ٥ = -٤ - ٦ + ١٠ = ٠$

ونستنتج من ذلك أن $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متعامدان

ب) ∵ $\overrightarrow{أ} = ٢\overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب} = \overrightarrow{ص} - ٣\overrightarrow{س} = -٣\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}$

∴ $\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب} = ٢ \times (-٣) + (-١) \times ١ = -٦ - ١ = -٧$

مثــــال:

اثبت أن Δ أب جـ قائم الزاوية حيث: أ (٢، −١، ١) ، ب (١، −٣، −٥) ، جـ (٣، −٤، −٤)

الحــــل:

∵ $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = (١، -٣، -٥) - (٢، -١، ١) = (-١، -٢، -٦)$

، $\overrightarrow{بجـ} = \overrightarrow{جـ} - \overrightarrow{ب} = (٣، -٤، -٤) - (١، -٣، -٥) = (٢، -١، ١)$

، $\overrightarrow{أجـ} = \overrightarrow{جـ} - \overrightarrow{أ} = (٣، -٤، -٤) - (٢، -١، ١) = (١، -٣، -٥)$

∴ $\overrightarrow{بجـ} \bullet \overrightarrow{أجـ} = (٢، -١، ١) \bullet (١، -٣، -٥)$

$= ٢ \times ١ + (-١) \times (-٣) + ١ \times (-٥) = ٢ + ٣ - ٥ = ٠$

∴ $\overrightarrow{بجـ} \perp \overrightarrow{أجـ}$ ∴ Δ أب جـ قائم الزاوية فى جـ

الزاوية بين متجهين:

∵ $\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب} = \| \overrightarrow{أ} \| \, \| \overrightarrow{ب} \|$ جتا θ

حيث θ قياس الزاوية بين المتجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ غير الصفريين ، $٠° \le \theta \le ١٨٠°$

∴ جتا $\theta = \dfrac{\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب}}{\| \overrightarrow{أ} \| \, \| \overrightarrow{ب} \|}$

حالات خاصة:

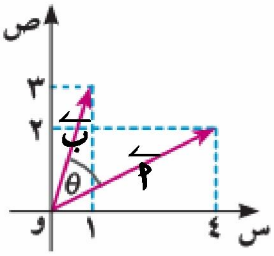
١ − إذا كان جتا $\theta = ١$ فإن $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متوازيان وفى نفس الإتجاه

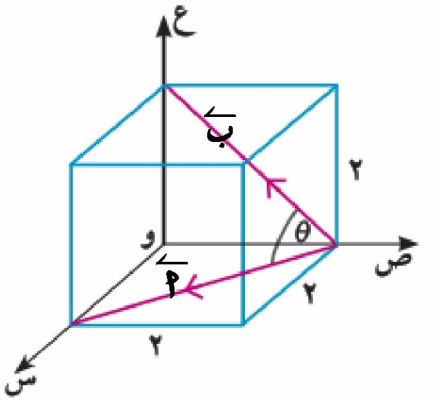
٢– إذا كان جتاθ = –١ فإن $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ متوازيان وفى عكس الإتجاه

٣– إذا كان جتاθ = ٠ فإن $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ متعامدان

مثـــال:

أوجد θ فى كل مما يأتى:





الحـــل:

الشكل الأول: ∵ $\overleftarrow{أ}$ = (٤ ، ٢) ، $\overleftarrow{ب}$ = (١ ، ٣)

∴ || $\overleftarrow{أ}$ || = $\sqrt{٤^٢ + ٢^٢}$ = $\sqrt{٢٠}$ ، || $\overleftarrow{ب}$ || = $\sqrt{١^٢ + ٣^٢}$ = $\sqrt{١٠}$

∴ جتاθ = $\dfrac{\overleftarrow{أ} \bullet \overleftarrow{ب}}{||\overleftarrow{أ}||\ ||\overleftarrow{ب}||}$ = $\dfrac{(٤ ، ٢) \bullet (١ ، ٣)}{\sqrt{٢٠} \times \sqrt{١٠}}$

= $\dfrac{٤ \times ١ + ٢ \times ٣}{\sqrt{٢٠٠}}$ = $\dfrac{١٠}{١٠\sqrt{٢}}$ = $\dfrac{١}{\sqrt{٢}}$ ∴ θ = جتا$^{-١}$ $(\dfrac{١}{\sqrt{٢}})$ = ٤٥°

الشكل الثانى:

المتجه $\overleftarrow{أ}$ يبدأ من النقطة (٠ ، ٢ ، ٠) وينتهى عند النقطة (٢ ، ٠ ، ٠)

∴ $\overleftarrow{أ}$ = (٢ ، ٠ ، ٠) – (٠ ، ٢ ، ٠) = (٢ ، –٢ ، ٠)

∴ || $\overleftarrow{أ}$ || = $\sqrt{٢^٢ + (-٢)^٢ + ٠^٢}$ = ٢$\sqrt{٢}$

و المتجه $\overleftarrow{ب}$ يبدأ من النقطة (٠ ، ٢ ، ٠) وينتهى عند النقطة (٠ ، ٠ ، ٢)

∴ $\overleftarrow{ب}$ = (٠ ، ٠ ، ٢) – (٠ ، ٢ ، ٠) = (٠ ، –٢ ، ٢)

∴ || $\overleftarrow{ب}$ || = $\sqrt{٠^٢ + (-٢)^٢ + ٢^٢}$ = ٢$\sqrt{٢}$

$\therefore \text{جتا}\,\theta = \dfrac{\vec{\text{أ}} \bullet \vec{\text{ب}}}{\|\vec{\text{أ}}\|\,\|\vec{\text{ب}}\|} = \dfrac{(2, -2, 0) \bullet (0, -2, 2)}{2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}}$

$= \dfrac{2\times 0 + (-2)\times(-2) + 0\times 2}{32} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$ $\qquad \therefore \theta = \text{جتا}^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = 60^\circ$

📖 مثـــال:

اوجد قياسات زوايا $\triangle$ أبجـ حيث: أ $(2, -3, 4)$ ، ب $(0, 1, 2)$ ، جـ $(-1, 2, 0)$

✍ الحـــل:

$\because \overrightarrow{\text{أب}} = \vec{\text{ب}} - \vec{\text{أ}} = (0, 1, 2) - (2, -3, 4) = (-2, 4, -2)$

، $\overrightarrow{\text{بجـ}} = \vec{\text{جـ}} - \vec{\text{ب}} = (-1, 2, 0) - (0, 1, 2) = (-1, 1, -2)$

، $\overrightarrow{\text{أجـ}} = \vec{\text{جـ}} - \vec{\text{أ}} = (-1, 2, 0) - (2, -3, 4) = (-3, 5, -4)$

$\therefore \text{جتا}(\angle \text{أ}) = \dfrac{\overrightarrow{\text{أب}} \bullet \overrightarrow{\text{أجـ}}}{\|\overrightarrow{\text{أب}}\|\,\|\overrightarrow{\text{أجـ}}\|} = \dfrac{(-2, 4, -2) \bullet (-3, 5, -4)}{\sqrt{(-2)^2 + (4)^2 + (-2)^2} \times \sqrt{(-3)^2 + (5)^2 + (-4)^2}}$

$= \dfrac{6 + 20 + 8}{\sqrt{24} \times \sqrt{50}} = \dfrac{17}{10\sqrt{3}}$ $\qquad \therefore \angle \text{أ} = \text{جتا}^{-1}\left(\dfrac{17}{10\sqrt{3}}\right) = 11{,}04^\circ$

$\therefore \text{جتا}(\angle \text{جـ}) = \dfrac{\overrightarrow{\text{أجـ}} \bullet \overrightarrow{\text{بجـ}}}{\|\overrightarrow{\text{أجـ}}\|\,\|\overrightarrow{\text{بجـ}}\|} = \dfrac{(-3, 5, -4) \bullet (-1, 1, -2)}{\sqrt{(-3)^2 + (5)^2 + (-4)^2} \times \sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + (-2)^2}}$

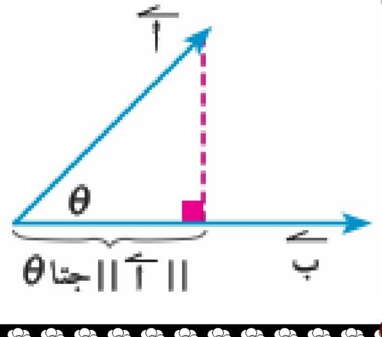
$= \dfrac{3 + 5 + 8}{\sqrt{50} \times \sqrt{6}} = \dfrac{16}{10\sqrt{3}} = \dfrac{8}{5\sqrt{3}}$ $\qquad \therefore \angle \text{جـ} = \text{جتا}^{-1}\left(\dfrac{8}{5\sqrt{3}}\right) = 22{,}52^\circ$

$\therefore \angle \text{ب} = 180^\circ - (11{,}04^\circ + 22{,}52^\circ) = 146{,}44^\circ$

📖 مركبة (مسقط) متجه فى إتجاه متجه آخر:

إذا كان $\vec{\text{أ}}$ ، $\vec{\text{ب}}$ متجهين فإن المركبة الجبرية للمتجه $\vec{\text{أ}}$

فى إتجاه المتجه $\vec{\text{ب}}$ ويرمز لها $\text{أ}_{\text{ب}}$ هى:



$$\text{أ ب} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\| \text{ جتا}\theta = \frac{\overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{ب}}\|}$$

أى أن:

مسقط متجه فى اتجاه متجه اخر = الضرب القياسى للمتجهين على معيار المتجه الذى يتم الإسقاط عليه

المركبة الإتجاهيه لمتجه فى إتجاه متجه آخر:

المركبة الإتجاهية لمتجه فى اتجاه متجه اخر = المركبة الجبرية للمتجه × متجه الوحدة للمتجه الآخر

فمثلا:

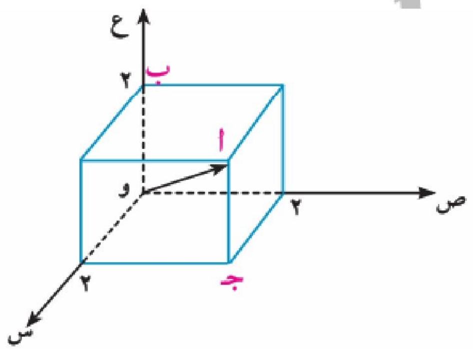
المركبة الإتجاهية للمتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ فى إتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{ب}}$ = المركبة الجبرية للمتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ ×متجه وحدة $\overrightarrow{\text{ب}}$

$$\overrightarrow{\text{أ ب}} = \left(\frac{\overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{ب}}\|}\right)\left(\frac{\overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{ب}}\|}\right) = \left(\frac{\overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{ب}}\|^{2}}\right) \overrightarrow{\text{ب}}$$

مثـــال:

الشكل المقابل يمثل مكعبا طول ضلعه ٢ وحدة طول

أوجد مسقط $\overrightarrow{\text{و أ}}$ فى إتجاه $\overrightarrow{\text{جـ ب}}$



الحـــل:

$\because \overrightarrow{\text{و أ}} = (٢ ، ٢ ، ٢)$

، $\overrightarrow{\text{جـ ب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{جـ}} = (٠ ، ٠ ، ٢) - (٢ ، ٢ ، ٠) = (-٢ ، -٢ ، ٢)$

$\therefore \|\overrightarrow{\text{جـ ب}}\| = \sqrt{(-٢)^{٢} + (-٢)^{٢} + ٢^{٢}} = ٢\sqrt{٣}$

$\therefore$ مسقط $\overrightarrow{\text{و أ}}$ فى إتجاه $\overrightarrow{\text{جـ ب}} = \frac{\overrightarrow{\text{و أ}} \bullet \overrightarrow{\text{جـ ب}}}{\|\overrightarrow{\text{جـ ب}}\|} = \frac{(٢ ، ٢ ، ٢) \bullet (-٢ ، -٢ ، ٢)}{٢\sqrt{٣}}$

$= \frac{٢ \times (-٢) + ٢ \times (-٢) + ٢ \times ٢}{٢\sqrt{٣}} = \frac{-٤}{٢\sqrt{٣}} = \frac{-٢}{\sqrt{٣}}$

مثـــال:

أوجدالمركبة الإتجاهيه للمتجه $\overrightarrow{أب}$ حيث أ = (٢ ، ١ ، ٠) ، ب = (٣ ، ١ ، $\sqrt{٣}$)

فى إتجاه المتجه $\overrightarrow{م}$ حيث $\overrightarrow{م}$ = (٣ ، ٢ ، ٢$\sqrt{٣}$)

الحـــل:

∵ $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$ ∴ $\overrightarrow{أب}$ = (٣ ، ١ ، $\sqrt{٣}$) − (٢ ، ١ ، ٠) = (١ ، ٠ ، $\sqrt{٣}$)

∴ المركبة الجبرية للمتجه $\overrightarrow{أب}$ فى إتجاه المتجه $\overrightarrow{م}$ = $\dfrac{\overrightarrow{أب} \cdot \overrightarrow{م}}{\|\overrightarrow{م}\|} = \dfrac{(١ ، ٠ ، \sqrt{٣}) \cdot (٣ ، ٢ ، ٢\sqrt{٣})}{\sqrt{٣^٢ + ٢^٢ + (٢\sqrt{٣})^٢}}$

$= \dfrac{(١ \times ٣ + ٠ \times ٢ + \sqrt{٣} \times ٢\sqrt{٣})}{٥} = \dfrac{٩}{٥}$

المركبة الإتجاهية للمتجه $\overrightarrow{أب}$ فى إتجاه المتجه $\overrightarrow{م}$

$= \dfrac{٩}{٥}\left(\dfrac{\overrightarrow{م}}{\|\overrightarrow{م}\|}\right) = \dfrac{٩}{٥} \times \dfrac{(٣ ، ٢ ، ٢\sqrt{٣})}{٥} = \left(\dfrac{٢٧}{٢٥} ، \dfrac{١٨}{٢٥} ، \dfrac{١٨\sqrt{٣}}{٢٥}\right)$

ايجاد الشغل المبذول باستخدام الضرب القياسى:

إذا أثرت القوة $\overrightarrow{ق}$ على جسم فحركته إزاحة $\overrightarrow{ف}$ فإن القوة تكون قد بذلت شغلا شـ يتحدد بالعلاقة:

$$شـ = \overrightarrow{ق} \cdot \overrightarrow{ف} = \|\overrightarrow{ق}\| \, \|\overrightarrow{ف}\| \, جتا\theta$$

ووحدة قياس الشغل هى وحدة قوة × وحدة إزاحة

فإذا كانت وحدة القوة (نيوتن) ووحدة الأزاحة (متر) تكون وحدة الشغل (نيوتن . متر) وهى تسمى جول

وإذا كانت وحدة القوة (داين) ووحدة الأزاحة (سم) تكون وحدة الشغل (داين . سم) وهى تسمى ارج

مثـــال:

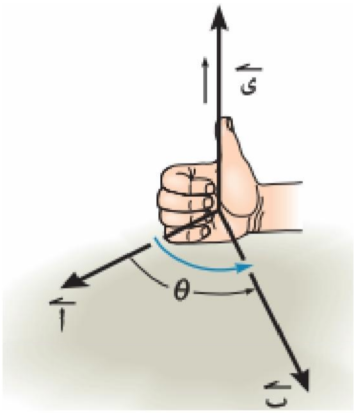
يتحرك جسيم تحت تأثير القوة $\overrightarrow{ق} = -٦\overrightarrow{س} + ٨\overrightarrow{ص}$ من النقطة أ = (−١ ، ٣) إلى النقطة ب = (٤ ، ٧) أوجد الشغل المبذول من القوة .

الحـــل:

$\overrightarrow{ف} = \overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$ = (٤ ، ٧) − (−١ ، ٣) = (٥ ، ٤)

∴ شغ = $\overrightarrow{ق} \bullet \overrightarrow{ف}$ = (−٦ ، ٨) • (٥ ، ٤) = −٦ × ٥ + ٨ × ٤ = ٢ وحدة شغل

الضرب الإتجاهى لمتجهين:



إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين قياس الزاوية بينهما θ وكان $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة عموديا على مستوييهما فإن:

حاصل الضرب الإتجاهى للمتجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ يعطى بالعلاقة:

$$\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = (\| \overrightarrow{أ} \| \; \| \overrightarrow{ب} \| \text{ جا } \theta) \; \overrightarrow{ى}$$

ويتحدد إتجاه $\overrightarrow{ى}$ (لأعلى أم أسفل) بقاعدة اليد اليمنى والتى تنص على:

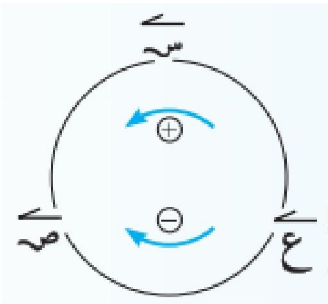
إذا كانت الأصابع المنحنية لليد اليمنى تشير إلى إتجاه الدوران من $\overrightarrow{أ}$ إلى $\overrightarrow{ب}$ عبر الزاوية الصغرى بينهما فإن إصبع الإبهام يشير إلى إتجاه المتجه $\overrightarrow{ى}$

ملاحظات هامة:

١ – إذا كان $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$ فى إتجاه $\overrightarrow{ى}$ فإن $\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{أ}$ يكون فى إتجاه − $\overrightarrow{ى}$ أى أن:

$$\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = - \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{أ}$$

٢ – إذا كان $\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ع}$ مجموعة يمينية لمتجهات الوحدة وبتطبيق قاعدة اليد اليمنى نجد أن:



$\overrightarrow{س} \times \overrightarrow{ص} = \overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ص} \times \overrightarrow{ع} = \overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ع} \times \overrightarrow{س} = \overrightarrow{ص}$

$\overrightarrow{ص} \times \overrightarrow{س} = -\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ع} \times \overrightarrow{ص} = -\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{س} \times \overrightarrow{ع} = -\overrightarrow{ص}$

$\overrightarrow{س} \times \overrightarrow{س} = \overrightarrow{0}$ ، $\overrightarrow{ص} \times \overrightarrow{ص} = \overrightarrow{0}$ ، $\overrightarrow{ع} \times \overrightarrow{ع} = \overrightarrow{0}$

مثـــال:

إذا كان $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$ = −٦٥ $\overrightarrow{ى}$ وكان $\| \overrightarrow{أ} \|$ = ٥ ، $\| \overrightarrow{ب} \|$ = ٢٦

أوجد قياس الزاوية بين المتجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$

الحـــل:

$\because \|\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}\| = \|\overrightarrow{\text{أ}}\|\,\|\overrightarrow{\text{ب}}\| \text{ جا}\theta$

$\therefore ٦٥ = ٥ \times ٢٦ \text{ جا}\theta \qquad \therefore \text{جا}\theta = \frac{٦٥}{١٣٠} = \frac{١}{٢} \qquad \therefore \theta = ٣٠^\circ$ أو $\theta = ١٥٠^\circ$

الضرب الإتجاهى لمتجهين فى النظام الإحداثى المتعامد:

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = \text{أ}_{\text{س}}\overrightarrow{\text{س}} + \text{أ}_{\text{ص}}\overrightarrow{\text{ص}} + \text{أ}_{\text{ع}}\overrightarrow{\text{ع}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = \text{ب}_{\text{س}}\overrightarrow{\text{س}} + \text{ب}_{\text{ص}}\overrightarrow{\text{ص}} + \text{ب}_{\text{ع}}\overrightarrow{\text{ع}}$ فإن:

$$\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = (\text{أ}_{\text{ص}}\text{ب}_{\text{ع}} - \text{أ}_{\text{ع}}\text{ب}_{\text{ص}})\overrightarrow{\text{س}} + (\text{أ}_{\text{ع}}\text{ب}_{\text{س}} - \text{أ}_{\text{س}}\text{ب}_{\text{ع}})\overrightarrow{\text{ص}} + (\text{أ}_{\text{س}}\text{ب}_{\text{ص}} - \text{أ}_{\text{ص}}\text{ب}_{\text{س}})\overrightarrow{\text{ع}}$$

ويتم إيجاد الضرب الإتجاهى لمتجهين بكتابة الصورة السابقة على شكل محدد ٣×٣ كمايلى:

$$\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ \text{أ}_{\text{س}} & \text{أ}_{\text{ص}} & \text{أ}_{\text{ع}} \\ \text{ب}_{\text{س}} & \text{ب}_{\text{ص}} & \text{ب}_{\text{ع}} \end{vmatrix}$$

حالة خاصة

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}} ، \text{أ}_{\text{ص}})$، $\overrightarrow{\text{ب}} = (\text{ب}_{\text{س}} ، \text{ب}_{\text{ص}})$ فى المستوى الإحداثى س ص **فإن**

$$\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ \text{أ}_{\text{س}} & \text{أ}_{\text{ص}} & ٠ \\ \text{ب}_{\text{س}} & \text{ب}_{\text{ص}} & ٠ \end{vmatrix} = (\text{أ}_{\text{س}}\text{ب}_{\text{ص}} - \text{أ}_{\text{ص}}\text{ب}_{\text{س}})\overrightarrow{\text{ع}}$$

مثـــال:

إذا كان $\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = ٦$ وكانت جيوب تمام زوايا الإتجاه للمتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ هى على الترتيب $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$

وكان المتجه $\overrightarrow{\text{ب}} = (-٢ ، ٣ ، ٥)$ أوجد $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}$

✍ الحـــل:

$\because \overrightarrow{\text{أ}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\| (\text{جتا}\theta_{\text{س}}\ \overrightarrow{\text{س}} + \text{جتا}\theta_{\text{ص}}\ \overrightarrow{\text{ص}} + \text{جتا}\theta_{\text{ع}}\ \overrightarrow{\text{ع}})$

$\therefore \overrightarrow{\text{أ}} = ٦(\frac{٢}{٣}\overrightarrow{\text{س}} + \frac{-٢}{٣}\overrightarrow{\text{ص}} + \frac{١}{٣}\overrightarrow{\text{ع}}) = ٤\overrightarrow{\text{س}} - ٤\overrightarrow{\text{ص}} + ٢\overrightarrow{\text{ع}}$

$$\therefore \overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ \text{أ}_{\text{س}} & \text{أ}_{\text{ص}} & \text{أ}_{\text{ع}} \\ \text{ب}_{\text{س}} & \text{ب}_{\text{ص}} & \text{ب}_{\text{ع}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ ٤ & -٤ & ٢ \\ -٢ & ٣ & ٥ \end{vmatrix}$$

$$= (-٤\times٥ - ٢\times٣)\overrightarrow{\text{س}} - (٤\times٥ + ٢\times٢)\overrightarrow{\text{ص}} + (٤\times٣ - ٢\times٤)\overrightarrow{\text{ع}}$$

$\therefore \overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = -٢٦\overrightarrow{\text{س}} - ٢٤\overrightarrow{\text{ص}} + ٤\overrightarrow{\text{ع}}$

📖 خواص الضرب الاتجاهى لمتجهين:

١) $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = -\overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{أ}}$ أى أن الضرب الإتجاهى لمتجهين عملية غير إبدالية

٢) $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{و}}$ حيث $\overrightarrow{\text{و}}$ المتجه الصفرى

٣) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{و}}$ فإنه إما $\overrightarrow{\text{أ}} \,//\, \overrightarrow{\text{ب}}$ أو أحد المتجهين أو كلاهما يساوى $\overrightarrow{\text{و}}$

٤) $\overrightarrow{\text{أ}} \times (\overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{جـ}}) = \overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{جـ}}$ خاصية التوزيع

٥) $(\text{ك}\,\overrightarrow{\text{أ}}) \times \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{أ}} \times (\text{ك}\,\overrightarrow{\text{ب}}) = \text{ك}(\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}})$ حيث ك عدد حقيقى

📖 توازى متجهين:

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متجهين غير صفريين فإن $\overrightarrow{\text{أ}} \,//\, \overrightarrow{\text{ب}}$ إذا كان:

$\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{و}}$ أو $\frac{\text{أ}_{\text{س}}}{\text{ب}_{\text{س}}} = \frac{\text{أ}_{\text{ص}}}{\text{ب}_{\text{ص}}} = \frac{\text{أ}_{\text{ع}}}{\text{ب}_{\text{ع}}}$ أو $\overrightarrow{\text{أ}} = \text{ك}\,\overrightarrow{\text{ب}}$

إذا كانت ك موجبة فإن $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متوازيان وفى نفس الإتجاه

وإذا كانت ك سالبة فإن $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متوازيان وفى عكس الإتجاه

مثـــال:

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (٢ ، -٣)$ وكان $\overrightarrow{\text{ب}} \parallel \overrightarrow{\text{أ}}$ فإذا كان $\|\overrightarrow{\text{ب}}\| = ٣\sqrt{١٣}$ أوجد $\overrightarrow{\text{ب}}$

الحـــل:

$\because \overrightarrow{\text{ب}} \parallel \overrightarrow{\text{أ}} \leftarrow \therefore \overrightarrow{\text{ب}} = \text{ك}\,\overrightarrow{\text{أ}} \leftarrow \therefore \|\overrightarrow{\text{ب}}\| = |\text{ك}|\,\|\overrightarrow{\text{أ}}\|$

$\therefore ٣\sqrt{١٣} = |\text{ك}| \times \sqrt{١٣} \quad \therefore |\text{ك}| = ٣ \quad \therefore \text{ك} = \pm ٣$

$\therefore \overrightarrow{\text{ب}} = ٣\,\overrightarrow{\text{أ}} = ٣(٢ ، -٣) = (٦ ، -٩)$

أو $\overrightarrow{\text{ب}} = -٣\,\overrightarrow{\text{أ}} = -٣(٢ ، -٣) = (-٦ ، ٩)$

مثـــال:

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (١ ، ٦ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (\text{ك} ، ٣ ، \text{م})$ ، $\overrightarrow{\text{جـ}} = (\text{ك} ، \text{م} ، \text{ك} + \text{م})$

وكان $\overrightarrow{\text{أ}} \parallel \overrightarrow{\text{ب}}$ أوجد $\|\overrightarrow{\text{جـ}}\|$

الحـــل:

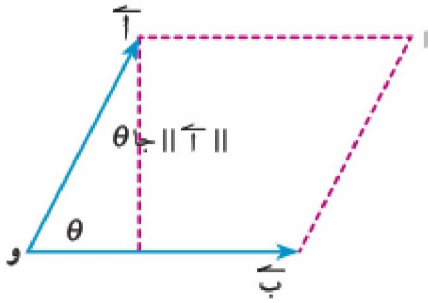
$\because \overrightarrow{\text{أ}} \parallel \overrightarrow{\text{ب}} \quad \therefore \frac{\text{أ}_{\text{س}}}{\text{ب}_{\text{س}}} = \frac{\text{أ}_{\text{ص}}}{\text{ب}_{\text{ص}}} = \frac{\text{أ}_{\text{ع}}}{\text{ب}_{\text{ع}}}$

$\therefore \frac{١}{\text{ك}} = \frac{٦}{٢} = \frac{٢}{\text{م}} \quad \therefore \frac{١}{\text{ك}} = ٣ \quad \therefore \text{ك} = \frac{١}{٣} \quad ، \quad \frac{٢}{\text{م}} = ٣ \quad \therefore \text{م} = \frac{٢}{٣}$

$\therefore \overrightarrow{\text{جـ}} = (\text{ك} ، \text{م} ، \text{ك} + \text{م}) = (\frac{١}{٣} ، \frac{٢}{٣} ، ١)$

$\therefore \|\overrightarrow{\text{جـ}}\| = \sqrt{(\frac{١}{٣})^{٢} + (\frac{٢}{٣})^{٢} + ١^{٢}} = \frac{\sqrt{١٤}}{٣}$

المعنى الهندسى للضرب الإتجاهى لمتجهين:



$\because \overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = (\|\overrightarrow{\text{أ}}\|\,\|\overrightarrow{\text{ب}}\| \text{ جا}\theta)\,\overrightarrow{\text{ى}}$

$\therefore \|\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}\| = \|\overrightarrow{\text{أ}}\|\,\|\overrightarrow{\text{ب}}\| \text{ جا}\theta$

∴ $\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\| = \|\overrightarrow{ب}\| \times ل$ حيث $ل = \|\overrightarrow{أ}\|$ جاθ

∴ $\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\|$ = مساحة متوازى الأضلاع الذى فيه $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{أ}$ ضلعان متجاوران فيه

= ضعف مساحة المثلث الذى فيه $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{أ}$ ضلعان متجاوران فيه

ملاحظة هامة:

إذا كان $\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{بجـ} = \overrightarrow{و}$ فإن النقط أ، ب، جـ تقع على إستقامة واحدة

مثـــال:

إذا كان $\overrightarrow{أ} = (١ ، ٢ ، -٤)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٠ ، ٥ ، -١)$ أوجد مساحة المثلث الذى فيه $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ضلعان

الحـــل:

∵ $\overrightarrow{أ} = (١ ، ٢ ، -٤)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٠ ، ٥ ، -١)$

∴ $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ١ & ٢ & -٤ \\ ٠ & ٥ & -١ \end{vmatrix}$

$= (-١ \times ٢ + ٥ \times ٤)\overrightarrow{س} - (-١ \times ١ + ٤ \times ٠)\overrightarrow{ص} + (١ \times ٥ - ٢ \times ٠)\overrightarrow{ع}$

∴ $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = ١٨\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص} + ٥\overrightarrow{ع}$

∴ $\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\| = \sqrt{١٨^٢ + ١^٢ + ٥^٢} = ٥\sqrt{١٤}$

∴ مساحة المثلث $= \frac{١}{٢}\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\| = \frac{٥}{٢}\sqrt{١٤}$ وحدة مساحة

مثـــال:

اثبت أن النقط أ = (٥ ، ٦ ، ٧) ، ب = (٧ ، -٨ ، ٩) ، جـ = (٣ ، ٢٠ ، ٥) على استقامة واحدة

الحـــل:

∵ $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}} = (٧ ، -٨ ، ٩) - (٥ ، ٦ ، ٧) = (٢ ، -١٤ ، ٢)$

، $\overrightarrow{\text{بج}} = \overrightarrow{\text{ج}} - \overrightarrow{\text{ب}} = (٣ ، ٢٠ ، ٥) - (٧ ، -٨ ، ٩) = (-٤ ، ٢٨ ، -٤)$

∴ $\overrightarrow{\text{بج}} = (-٤ ، ٢٨ ، -٤) = -٢(٢ ، -١٤ ، ٢) = -٢\,\overrightarrow{\text{أب}}$

∴ $\overrightarrow{\text{أب}} \,//\, \overrightarrow{\text{بج}}$ ، ∵ نقطة ب مشتركة ∴ النقط أ ، ب ، ج تقع على إستقامة واحدة

حل آخر باستخدام الضرب الإتجاهى

$$\therefore \overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{بج}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ ٢ & -١٤ & ٢ \\ -٤ & ٢٨ & -٤ \end{vmatrix}$$

$$= (١٤ \times ٤ - ٢ \times ٢٨)\overrightarrow{\text{س}} - (-٤ \times ٢ + ٢ \times ٤)\overrightarrow{\text{ص}} + (٢ \times ٢٨ - ٤ \times ١٤)\overrightarrow{\text{ع}}$$

$$= (٥٦ - ٥٦)\overrightarrow{\text{س}} - (-٨ + ٨)\overrightarrow{\text{ص}} + (٥٦ - ٥٦)\overrightarrow{\text{ع}}$$

∴ $\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{بج}} = \overrightarrow{\text{و}}$ ∴ النقط أ ، ب ، ج تقع على إستقامة واحدة

الضرب الثلاثى القياسى:

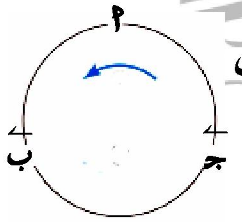
إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{ج}}$ ثلاثة متجهات فإن المقدار $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{ج}}$ يعرف بحاصل الضرب الثلاثى القياسى ويكون:

$$\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{ج}} = \begin{vmatrix} \text{أ}_{\text{س}} & \text{أ}_{\text{ص}} & \text{أ}_{\text{ع}} \\ \text{ب}_{\text{س}} & \text{ب}_{\text{ص}} & \text{ب}_{\text{ع}} \\ \text{ج}_{\text{س}} & \text{ج}_{\text{ص}} & \text{ج}_{\text{ع}} \end{vmatrix}$$

خواص الضرب الثلاثى القياسى:

١ – الضرب الثلاثى القياسى قيمته لاتتغير أذا كان ترتيب المتجهات فى ترتيب دورى واحد أى أن:

$$\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{ج}} = \overrightarrow{\text{ب}} \cdot \overrightarrow{\text{ج}} \times \overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{ج}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}$$



٢ – لاتتغير قيمة الضرب الثلاثى القياسى إذا بدلنا علامتى الضرب القياسى والإتجاهى مع المحافظة على ترتيب المتجهات فى ترتيب دورى واحد أى أن:

$$\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{ج}} = \overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} \cdot \overrightarrow{\text{ج}}$$

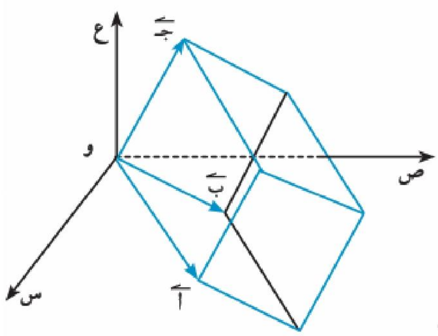
٣ – إذا كانت المتجهات $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ ، $\overleftarrow{جـ}$ فى مستوى واحد فإن الضرب الثلاثى القياسى ينعدم أى أن:

$$\overleftarrow{أ} \bullet \overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{جـ} = ٠$$

٤ – إذا كان $\overleftarrow{أب} \bullet \overleftarrow{أجـ} \times \overleftarrow{أء} = ٠$ فإن النقط أ ، ب ، جـ ، ء تقع فى مستوى واحد

أى أن الشكل أبجء رباعى مستوى (أضلاعه تقع فى مستوى واحد)

المعنى الهندسى لحاصل الضرب الثلاثى القياسى:



إذا كان $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ ، $\overleftarrow{جـ}$ ثلاثة متجهات تكون ثلاثة أضلاع غير متوازية فى متوازى سطوح فإن:

حجم متوازى السطوح = القيمة المطلقة لحاصل الضرب الثلاثى القياسى

أى أن:

$$\text{حجم متوازى السطوح} = \left| \overleftarrow{أ} \bullet \overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{جـ} \right|$$

مثـــال:

أوجد حجم متوازى السطوح الذى فيه ثلاثة أحرف غير متوازية يمثلها المتجهات $\overleftarrow{أ} = (٣ ، -٤ ، ١)$

، $\overleftarrow{ب} = (٠ ، ٢ ، -٣)$ ، $\overleftarrow{جـ} = (٣ ، ٢ ، ٢)$

الحـــل:

∵ $\overleftarrow{أ} = (٣ ، -٤ ، ١)$ ، $\overleftarrow{ب} = (٠ ، ٢ ، -٣)$ ، $\overleftarrow{جـ} = (٣ ، ٢ ، ٢)$

$$\therefore \overleftarrow{أ} \bullet \overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{جـ} = \begin{vmatrix} ٣ & -٤ & ١ \\ ٠ & ٢ & -٣ \\ ٣ & ٢ & ٢ \end{vmatrix}$$

$$= ٣(٢ \times ٢ + ٢ \times ٣) + ٤(٠ \times ١ + ٣ \times ٣) + ١(٠ \times ٢ - ٢ \times ٣)$$

$$= ٣ \times ١٠ + ٤ \times ٩ + ١ \times (-٦) = ٣٠ + ٣٦ - ٦ = ٦٠$$

$\therefore$ حجم متوازى السطوح $= \left| \overleftarrow{أ} \bullet \overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{جـ} \right| = |٦٠| = ٦٠$ وحدة حجم

مثـــال:

إثبت أن المتجهات $\overrightarrow{أ} = (١ ، -٢ ، ٣)$ ، $\overrightarrow{ب} = (-٢ ، ٣ ، -٤)$ ، $\overrightarrow{جـ} = (١ ، -٣ ، ٥)$
تقع فى مستوى واحد

الحـــل:

$\because$ $\overrightarrow{أ} = (١ ، -٢ ، ٣)$ ، $\overrightarrow{ب} = (-٢ ، ٣ ، -٤)$ ، $\overrightarrow{جـ} = (١ ، -٣ ، ٥)$

$$\therefore \overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{جـ} = \begin{vmatrix} ١ & -٢ & ٣ \\ -٢ & ٣ & -٤ \\ ١ & -٣ & ٥ \end{vmatrix}$$

$$= ١(٣\times٥ - ٣\times٤) + ٢(-٢\times٥ + ١\times٤) + ٣(٢\times٣ - ١\times٣)$$

$$= ١(١٥ - ١٢) + ٢(-١٠ + ٤) + ٣(٦ - ٣) = ٣ - ١٢ + ٩ = ٠$$

$\therefore$ المتجهات $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{جـ}$ تقع فى مستوى واحد

مثـــال:

إذا كانت: $أ = (٤ ، ٨ ، ١٢)$ ، $ب = (٢ ، ٤ ، ٦)$ ، $جـ = (٣ ، ٥ ، ٤)$ ، $ء = (٥ ، ٨ ، ٥)$
إثبت أن النقط أ ، ب ، جـ ، ء تقع فى مستوى واحد

الحـــل:

$\because \overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = (٢ ، ٤ ، ٦) - (٤ ، ٨ ، ١٢) = (-٢ ، -٤ ، -٦)$

، $\overrightarrow{أجـ} = \overrightarrow{جـ} - \overrightarrow{أ} = (٣ ، ٥ ، ٤) - (٤ ، ٨ ، ١٢) = (-١ ، -٣ ، -٨)$

، $\overrightarrow{أء} = \overrightarrow{ء} - \overrightarrow{أ} = (٥ ، ٨ ، ٥) - (٤ ، ٨ ، ١٢) = (١ ، ٠ ، -٧)$

$$\therefore \overrightarrow{أب} \bullet \overrightarrow{أجـ} \times \overrightarrow{أء} = \begin{vmatrix} -٢ & -٤ & -٦ \\ -١ & -٣ & -٨ \\ ١ & ٠ & -٧ \end{vmatrix}$$

$$= -٢(٣\times٧ + ٠) + ٤(١\times٧ + ١\times٨) - ٦(٠ + ١\times٣)$$

$$= -٢\times٢١ + ٤\times١٥ - ٦\times٣ = -٤٢ + ٦٠ - ١٨ = ٠$$

$\therefore$ النقط أ ، ب ، جـ ، ء تقع فى مستوى واحد

الرياضيات... فكر... متعة... إبداع... محمود السيد